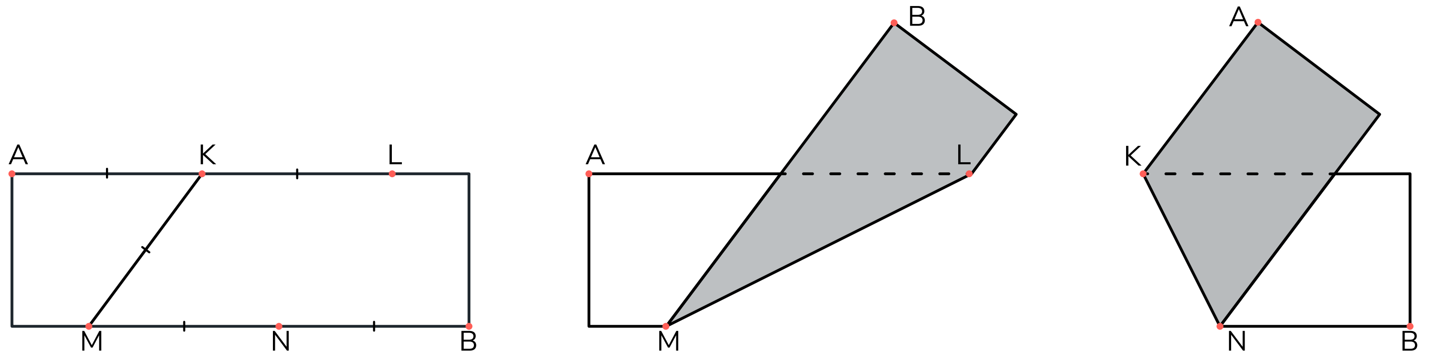
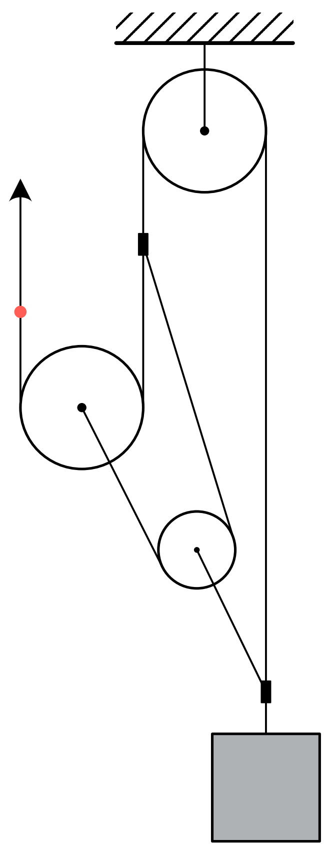
Задача 1 Вася отметил на полоске бумаги две угловые точки: A и B (см. рисунок). Затем он взял заклинивший циркуль и отметил вдоль длинной стороны от точки A последовательно два равных отрезка, получились точки K и L и вдоль другой длинной стороны от точки B такие же два равных отрезка, получились точки M и N. Оказалось, что расстояние между точками K и M в точности равно раствору циркуля, а при сложении полоски вдоль линий LM и KN расстояние между точками A и B оказывается равным 8 и 12 см соответственно. Найдите раствор заклинившего циркуля.



Задача 2 Вычислите сумму:

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{99\cdot 100} =$$

Задача 3 На рисунке представлена конструкция полиспаста, использующегося в альпинизме. Определите, какой выигрыш в силе может давать такой полиспаст, если считать, что все блоки, входящие в него, невесомы и могут двигаться без трения. Также, считайте, что все нити в конструкции параллельны друг другу.



Задача 4 В теплоизолированном стакане заморозили воду. При этом, снизу образовался однородный лёд, а сверху — с маленькими пузырьками, равномерно распределёнными по объёму. Концентрация этих пузырьков $n = 36\,\text{шт/см}^3$. Стакан со льдом прикрепили ко дну мензурки с водой. Из-за теплового контакта лёд начал плавиться с постоянной скоростью (по объёму). Экспериментатор записывал объём воды в мензурке и время, прошедшее с начала эксперимента. Таблица с его измерениями приведена ниже.

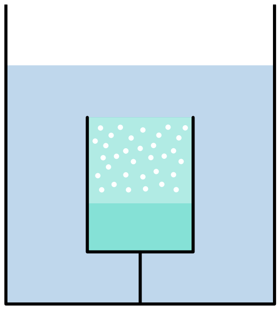
V, см^3	294,0	290,3	288,0	286,0	285,4	283,0
t, с	13	21	26	31	34	46

1. Найдите скорость таяния льда (по объёму), считая её постоянной.

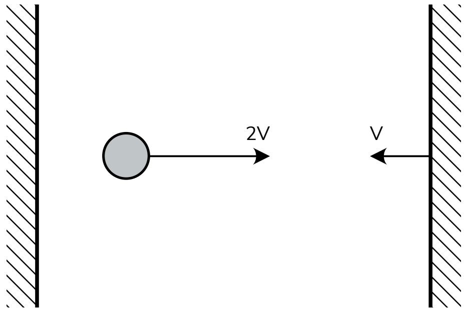
2. Определите, через какое время от начала эксперимента растаял весь лёд с пузырьками.

3. Определите, чему равен объём одного пузырька?

Плотность воды принять равной $\rho_в = 1$ г/см^3, а плотность льда — $\rho_л = 0{,}9$ г/см^3. Считать, что оба вида льда плавятся с одинаковой скоростью.



К задаче 4



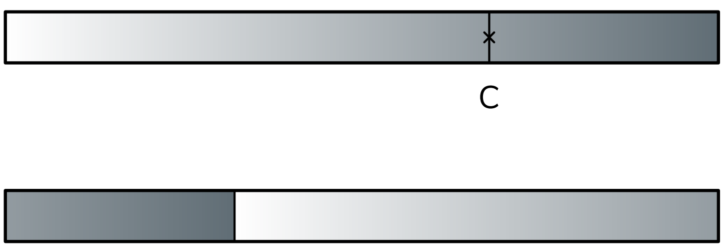
К задаче 5

Задача 5 Между двумя массивными стенками, одна из которых покоится, а другая движется к первой со скоростью v находится лёгкий шарик. В начальный момент времени $t_0 = 0$ с шарик располагается возле неподвижной стены и движется со скоростью $2v$ направо.

1. Первый удар произошёл, когда расстояние между стенками было $x_1 = 24$ см. На каком расстоянии произойдёт второе столкновение мячика с правой стенкой?

2. Какова средняя скорость мячика за промежуток времени от t_0 до t_2, если $v = 5$ м/с. Здесь t_2 — время второго удара шарика о подвижную стену.

Задача 6 Дан канат длины $L = 1$ м с линейно распределённой плотностью $\lambda = \lambda_0 + k \cdot x$, где λ_0 — плотность левого конца каната, x — расстояние левого конца до точки с плотностью λ, а k — постоянный коэффициент. Любопытный экспериментатор нашёл центр масс каната и разрезал его в этом месте. После чего, не переворачивая, переставил получившиеся кусочки местами и склеил их. Найдите расстояние между старым и новым положениями центра масс каната, считая, что плотность λ_0 крайне мала $\left(\text{т.е.} \dfrac{\lambda_0}{kL} \ll 1\right)$.

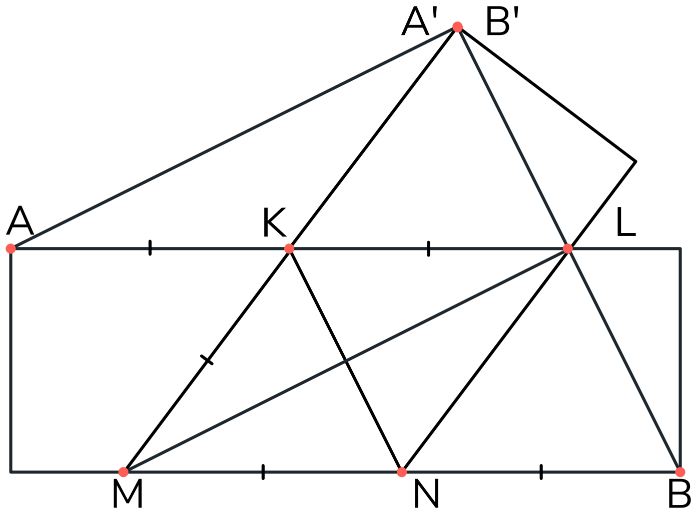


Решения

Задача 1

Заметим, что $MK = NL$. Это легко понять, например, из симметрии относительно центра полоски бумаги. Обозначим неизвестный раствор циркуля за x. Тогад

$$AK = KL = KM = MN = NB = x$$



Из равенства треугольников MKL и MNL заключаем, что $\angle KML = \angle NML$. Математически операция складывания листочка — это зеркальная симметрия относительно линии сгиба. Тогда становится ясно, что при первом сгибе (относительно ML) прямая MB перешла в прямую MK, прямая AL — в прямую NL а точка N — в точку K. Тогда из равенства треугольников AKB' и MKL следует равенство их сторон (B' — это точка, в которую переходит точка B при описанной симметрии):

$$AB' = ML = 8$$

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что при втором сгибе, относительно KN, прямая AL перешла в прямую MK, прямая MB в — прямую NL, а точка M в точку L. Здесь, снова A' — это точка, в которую переходит точка A при втором сгибе.

Докажем теперь, что отрезки $A'L$ и LB лежат на одной прямой. Для этого воспольвзуемся равенством треугольников BNL, NLK и LKA' (по боковой стороне и углу напротив основания; эти углы равны по параллельности соответствующих прямых). Таким образом угол $\angle BLA'$ равен сумме углов треугольника BNL, то есть $180°$.

Замечая, что точки A' и B' совпадают, а также в очередной раз воспользовавшись симметрией относительно прямой ML, находим, что $ML \perp A'B$ и $A'B = 2LB$. А по условию $A'B = 12$. Т.е. $LB = 6$ и $\angle MLB = 90°$.

Наконец, запишем теорему Пифагора для треугольника MLB.

$$ML^2 + LB^2 = MB^2$$

$$8^2 + 6^2 = (2 \cdot x)^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = 5$$

Ответ: x = 5 см

Критерии

№	Критерий	Балл
1	Замечено, что $KN = LM$ (ромб) по симметрии	1
2	Замечено, что при сложении точки K и M и точки $N - L$ накладываются (без объяснения -1 балл)	2
3	Доказано, что $AB = NL$	2
4	Доказано что точки A B L лежат на одной прямой	2
5	Доказано, что $AB = 2KM$	2
6	Правильно посчитан ответ	1

Задача 2
Заметим, что

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Тогда сумма серьёзно упрощается:

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} =$$
$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{1} - \frac{1}{100} = \frac{1}{99}$$

Ответ: $0{,}99$

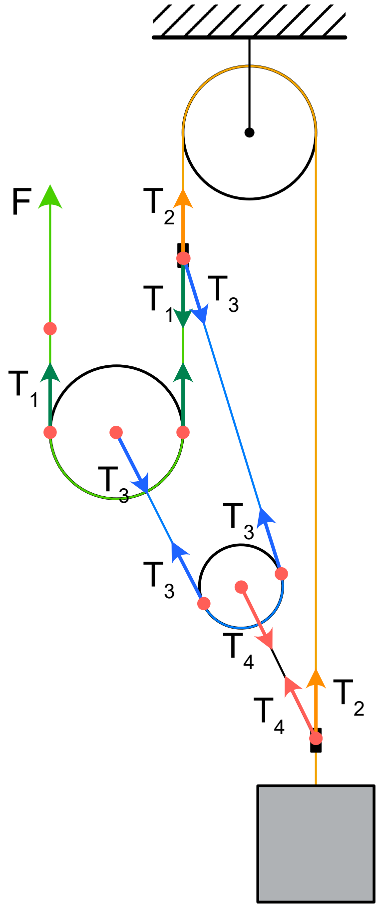
Критерии

№	Критерий	Балл
1	Получена телескопическая сумма, но ответ не верен	8
2	Получена не та телескопическая сумма (ошибка в знаке и тд)	4

3	Только замечена закономерность $n - 1/n$	4
4	Доказательство по индукции: только переход	6

Задача 3

Из-за невисомости нитей можно считать, что сила их натяжения постоянна вдоль всей их длины. Разными зветами на рисунке отмечены «разные» куски нитей — те, что натянуты с разной силой.



С учётом сказанного расставим силы натяжения и запишем условия равновесия блоков (массой блоков также пренебрегаем) и груза:

$$\begin{cases} F = T_1 \\ 2T_1 = T_3 \\ T_1 + T_3 = T_2 \\ 2T_3 = T_4 \\ T_2 + T_4 = mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = F \\ T_3 = 2F \\ T_2 = 3F \\ t_4 = 4F \\ mg = 7F \end{cases}$$

Получается, что выигрыш в силе составляет 7 раз.
Ответ: 7 раз.

Критерии

№	Критерий	Балл
1	Верно расставлены силы	3
2	Записаны условия равновесия грузов	4
3	Получен верный ответа	3

Задача 4

Пусть начальный объём содержимого стакана равен V_0 и растаял объём v снега с пузыриками. Запишем оставшийся объём содержимого стакана:

$$V = V_0 - v + (v - nv \cdot V_п)\frac{\rho_л}{\rho_в} = V_0 + v \cdot \left[(1 - n \cdot V_п)\frac{\rho_л}{\rho_в} - 1\right]$$

И тоже самое для плавления льда без пузырьков (начальный объём V_1):

$$V = V_1 - \nu + \nu\frac{\rho_л}{\rho_в} = V_0 + \nu \cdot \left[\frac{\rho_л}{\rho_в} - 1\right]$$

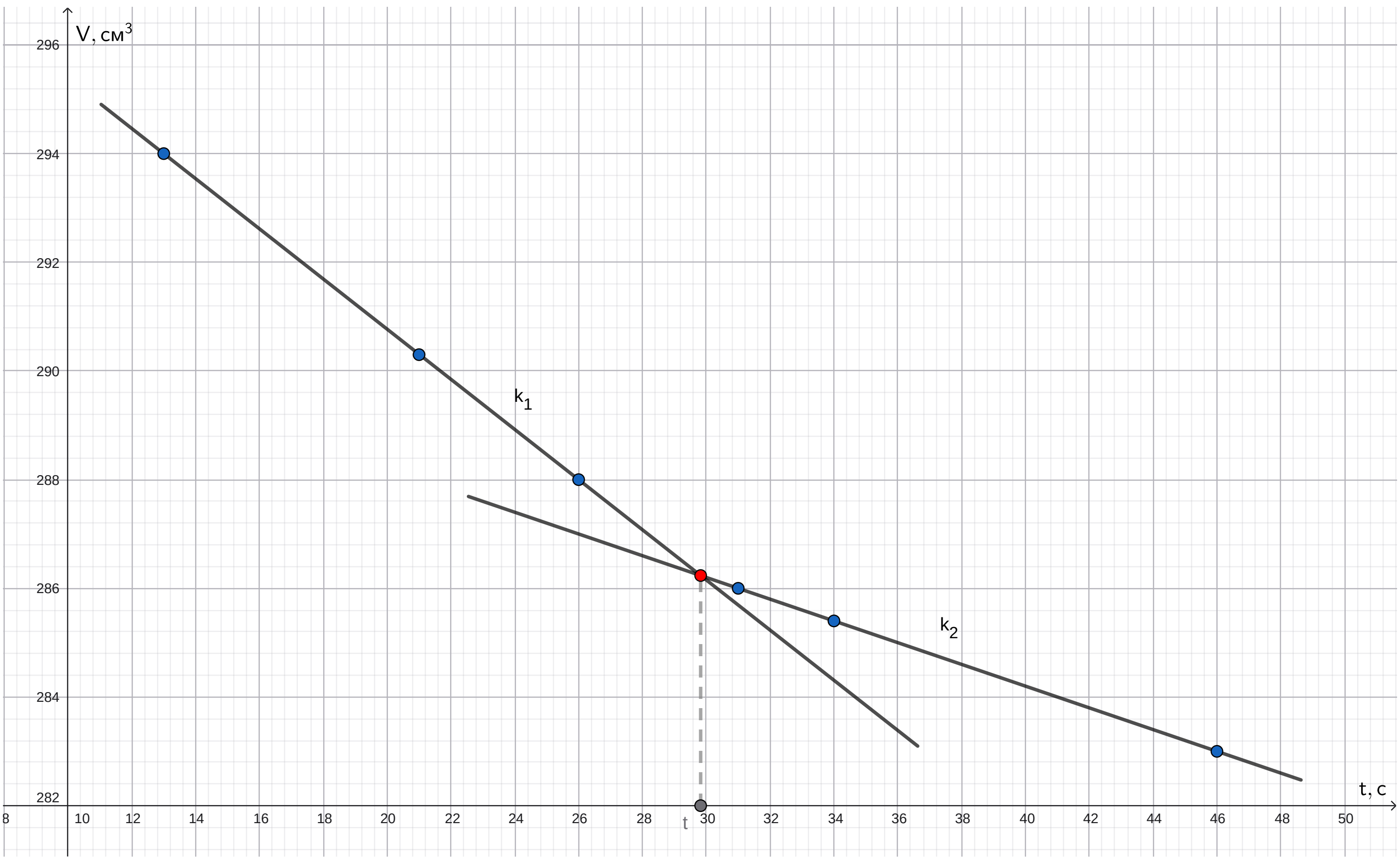
Так как по условию лёд плавится равномерно, то можно переписать эти равенства следующим образом:

$$\begin{cases} V = V_0 + \mu \cdot \left[(1 - n \cdot V_п)\,\frac{\rho_л}{\rho_в} - 1\right] \cdot t \\ \\ V = V_0 + \mu \cdot \left[\frac{\rho_л}{\rho_в} - 1\right] \cdot t \end{cases}$$

Здесь $\mu = \Delta V/\Delta t$ — скорость плавления льда.
Таким образом понятно, что в координатах $V - t$ эти уравнения задают две прямые с коэффициентами наклона k_1 и k_2, такими, что

$$\begin{cases} k_1 = \mu \cdot \left[(1 - n \cdot V_п)\,\frac{\rho_л}{\rho_в} - 1\right] \\ \\ k_2 = \mu \cdot \left[\frac{\rho_л}{\rho_в} - 1\right] \end{cases}$$

Данные коэффициенты легко найти из графика зависимости V от t, который построим по приведённой таблице



$$k_1 \approx -0{,}46\,\text{см}^3/\text{с} \qquad k_2 = -0{,}2\,\text{см}^3/\text{с}$$

Таким образом находим скорость плавления льда:

$$\mu = \frac{k_2}{\frac{\rho_л}{\rho_в} - 1} = 2\,\text{см}^3/\text{с}$$

Время, в которое растаяли все пузырьки определяется точкой пересечения прямых и равно

$$t_1 \approx 29{,}8\,\text{с}$$

Наконец, подставляя выражение для μ в выражение для k_1, найдём объём одного пузырька:

$$V_п = \frac{1}{n}\frac{k_2 - k_1}{k_2}\frac{\rho_л - \rho_в}{\rho_л} = 0{,}004\,\text{см}^3$$

Ответ:

1. $\mu = \frac{k_2}{\frac{\rho_л}{\rho_в}-1} = 2\,\text{см}^3/\text{с}$
2. $t \approx 29{,}8\,\text{с}$
3. $V_п = \frac{1}{n}\frac{k_2-k_1}{k_2}\frac{\rho_л-\rho_в}{\rho_л} = 0{,}004\,\text{см}^3$

Критерии

№	Критерий	Балл
1	Найдено теоретическое выражение для коэффициентов наклона графика $V(t)$	4
2	Построен графика	2
3	Найдены численные значения k_1 и k_2 из графика	1
4	Найдено численное значение μ	1
5	Найдено численное значение t из графика	1
6	Найдено численное значение $V_п$	1

Задача 5

Сперва определим, как изменится скорость движения шарика после отскока от подвижной стены. Для этого перейдём в систему отсчёта стены. В этой СО скорость стены равна

0, а скорость шарика — $3v$. После отскока от неподвижной стены скорость шарика не изменяется по модулю и по прежнему равна $3v$. Переходя обратно в систему отсчёта земли, находим, что шарик после удара движется влево со скоростью $4v$.
Найдём теперь, на каком расстоянии от неподвижной стены шарик вновь встретиться с подвижной стеной. Для этого приравняем времена движения шарика и стены до этого столкновения:

$$\frac{x_1 + x_2}{4v} = \frac{x_1 - x_2}{v}$$

Из этого равенства находим $x_2 = \frac{3}{5}x_1 = \frac{72}{5}$ см.
Далее найдём среднюю скорость движения шарика до этого столкновения $v_{\text{ср}}$. По определению средняя скорость — это всё расстояние, делённой на всё время:

$$v_{\text{ср}} = \frac{x_1 + x_1 + x_2}{\frac{x_1}{2v} + \frac{x_1}{4v} + \frac{x_2}{4v}} = \frac{x_1 + x_1 + \frac{3}{5}x_1}{\frac{x_1}{2} + \frac{x_1}{4} + \frac{3x_1}{5\cdot 4}} \cdot v = \frac{2 + \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{20}} \cdot v = \frac{\frac{13}{5}}{\frac{10+5+3}{20}} \cdot v = \frac{26}{9}v$$

Ответ:

1. $x_2 = \frac{3}{5}x_1 = \frac{72}{5}$ см
2. $\frac{26}{9}v = \frac{130}{9}$ м/с

Критерии

№	Критерий	Балл
1	Найдено, как изменяется скорость после отскока от подвижной стены	2
2	Записано соотношение на x_1 и x_2	3
3	Найдено верное значение x_1	1
4	Записано верное выражение для средней скорости	3
5	Найдено верное значение $v_{\text{ср}}$	1

Задача 6
Очевидно, что после разреза центр масс склеенной верёвки оказался точно в месте склейки. Пусть исходная координата центра масс — x. Тогда величина, на которую он сдвинулся равняется $x - (L - x) = 2x - L$.
Таким образом, для ответа на вопрос задачи необходимо найти изначальную координату центра масс x.
Для этого вспомним, что на графике зависимости плотности от длины масса изображается площадью под этим графиком. Центр масс — это такая точка, что масса, находящаяся

слева от него, равна массе, находящейся справа от него. Или, иными словами, площадь под графиком слева от ц.м. равна площади под графиком справа от ц.м. В нашем случае эти площади представляют из себя площади прямоугольных трапеций. Левая с основаниями λ_0 и $\lambda_0 + kx$ и высотой x. А правая правая — $\lambda_0 + kx$ и $\lambda_0 + kL$ и высотой $L - x$.
Тогда равенство их площадей запишется так:

$$\frac{1}{2} \cdot (\lambda_0 + \lambda_0 + kx) \cdot x = \frac{1}{2} \cdot (\lambda_0 + kx + \lambda_0 + kL) \cdot (L - x)$$

$$2\lambda_0 x + kx^2 = 2\lambda_0 L + kxL + kL^2 - 2\lambda_0 x - kx^2 - kLx$$

$$2kx^2 + 4\lambda_0 x - 2\lambda_0 L - kL^2 = 0$$

Поделим это уравнение на kL^2:

$$2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 4\frac{\lambda_0}{kL}\frac{x}{L} - 2\frac{\lambda_0}{kL} - 1 = 0$$

По условию $\frac{\lambda_0}{kL} \ll 1$, поэтому вторым и третьим слагаемыми можно пренебречь. Таким образом получаем

$$2\left(\frac{x}{L}\right)^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

Заметим также, что условие малости $\frac{\lambda_0}{kL} \ll 1$ можно переписать так $\lambda_0 \ll kL$. И интерпретировать так, что одна из сторон трапеции ничтожно мала. То есть эта трапеция, на самом деле, является почти треугольником. Тогда решение заметно упрощается.
Ответ: $(\sqrt{2} - 1)L$

Критерии

№	Критерий	Балл
1	Указано, что центр масс будет в точке склейки	2
2	Выражено смещение центра масс через длину каната и координату центра масс	1
3	Записано соотношение на равенство масс левой и правой частей	4
4	Получен верный ответа	3