7 класс

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. На школьных соревнованиях по северной ходьбе через каждые 100 метров дистанции организованы точки контроля, на которых стоят судьи. Мальчики судят по одному, а девочки — по двое. Оказалось, что на любых двух соседних точках контроля в сумме трое судей, и при этом мальчиков ровно 35% от общего числа судей. Сколько всего судей на дистанции?

Ответ. 40.

Решение

Так как на любых двух соседних точках контроля в сумме трое судей, то среди любых двух соседних точек на одной судят мальчики, а на другой — девочки, а значит, точки, где судят мальчики, чередуются с точками, где судят девочки.

Попробуем разбить все точки контроля, начиная с первой, на пары подряд идущих. Пусть получилось k целых пар. Если бы все точки можно было разбить на пары, то мальчиков должно быть ровно треть от всех судей. Но 35% — это больше $\frac{1}{3}$, а значит, останется одна точка контроля, на которой стоит мальчик и которой не нашлось пары. Тогда всего мальчиков — $k+1$, а девочек — $2k$, причем $\frac{k+1}{(k+1)+2k} = \frac{35}{100}$. Решая это уравнение, получаем, что $k = 13$, тогда всего судей: $3k + 1 = 40$.

Критерии проверки решения

Содержание критерия	Кол-во баллов
Приведен только верный ответ	0 баллов
Указано, что на крайних точках должны стоять мальчики, но обоснование этого факта использует неточное вычисление процентов	1 балл
Указано, что точки, на которых стоят мальчики, чередуются с точками, на которых стоят девочки	1 балл
Доказано, что точки, на которых стоят мальчики, чередуются с точками, на которых стоят девочки, при этом на крайних точках стоят мальчики	3 балла
Полное обоснованное решение	7 баллов

2. Числа a, b и c в некотором порядке равны 1, 2 и 3. Используя только буквы a, b, c, знаки сложения, вычитания и умножения (и не используя числа!), составьте выражение, равное 1. (Можно использовать скобки.)

Решение

Возможный пример:

$$(a+b+c) + (a+b+c) - (ab+bc+ac) = 6+6-(1\cdot 2+2\cdot 3+1\cdot 3) = 12-11 = 1.$$

Критерии проверки решения

Содержание критерия	Кол-во баллов
Приведен любой пример, в котором не выполнены требования условия	0 баллов
Приведен любой подходящий пример	7 баллов

3. На окружности отмечены 20 точек. Некоторые пары точек соединены линиями, причем каждая пара точек — не более чем одной. Всего проведена 101 линия. Эти линии покрашены в 5 цветов. Докажите, что из какой-то точки выходят хотя бы три одноцветные линии.

Решение

Посчитаем концы линий, которые выходят из точек. Если линий 101, то таких концов будет в два раза больше (так как у каждой линии два конца), то есть 202. Всего точек 20, тогда из какой-то точки выходит хотя бы 11 концов линий, так как иначе концов линий было бы не больше $10 \cdot 20 = 200$.

Рассмотрим точку, из которой выходит 11 концов линий. Каждая из них может быть покрашена в один из 5 цветов. Если бы из этой точки выходило не более двух линий каждого цвета, то из нее выходило бы не более $2 \cdot 5 = 10$ концов линий. Но $11 > 10$, а значит, линий какого-то цвета выходит хотя бы 3.

Критерии проверки решения

Содержание критерия	Кол-во баллов
Замечено, что если нет трех одноцветных линий, то из каждой точки выходит не более 10 линий	1 балл
Доказано, что найдётся точка, из которой выходит хотя бы 11 линий	3 балла
Полное обоснованное решение	7 баллов

4. У Тимура есть набор из 81 различной карточки. На каждой карточке написано однозначное, двузначное или трехзначное число. Каждое число может быть красным, синим или зеленым, а шрифт маленьким, средним или большим. Используются только цифры 1, 2 и 3, причем если в числе более одной цифры, то они одинаковы (в том числе по цвету и шрифту). Может ли Тимур выложить все карточки в ряд так, чтобы числа на любых двух соседних карточках различались только в одном параметре (количество знаков, используемая цифра, цвет, шрифт)?

Ответ. Может.

Решение

Выложим сначала в ряд красные 1, 2 и 3 с маленьким шрифтом, затем красные 3, 2 и 1 со средним шрифтом, затем красные 1, 2 и 3 с крупным шрифтом. Получили ряд из 9 карточек. Затем выложим аналогичный ряд, но в обратном порядке из красных двузначных чисел: от красного 33 с крупным шрифтом до красного 11 с мелким шрифтом. После этого выложим в том же порядке, что и первые 9 карточек, ряд из красных трехзначных чисел: от красного 111 мелким шрифтом до красного 333 крупным шрифтом. Получился ряд из 27 карточек.

Теперь выложим аналогичный ряд для 27 карточек с синими числами, но в обратном порядке, а после него — ряд из 27 карточек с зелеными числами в том же порядке, что ряд из карточек с красными числами. В полученном ряде использованы все карточки и выполняются требования условия.

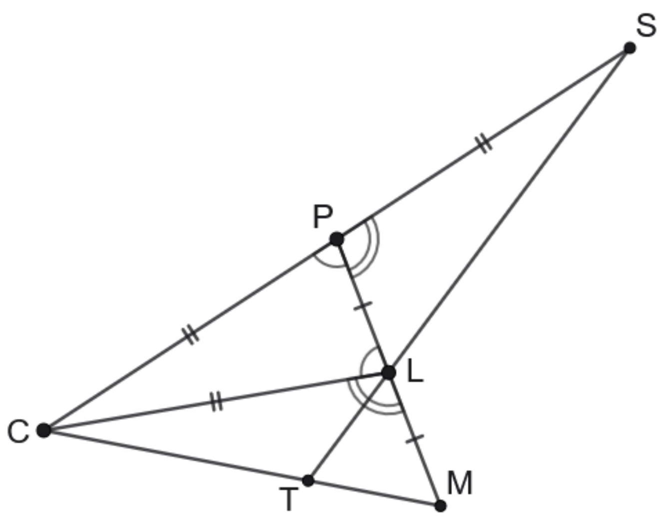
Критерии проверки решения

Содержание критерия	**Кол-во баллов**
Приведен любой пример, в котором не выполнены требования условия	0 баллов
Приведен любой подходящий пример	7 баллов

5. В треугольнике CPM провели медиану CL. На продолжении стороны CP за точку P отметили точку S. Прямая LS пересекает сторону CM в точке T. Оказалось, что отрезки CP, PS и CL равны. Докажите, что $MT = LT$.

Решение

Так как $CP = CL$, то треугольник PCL — равнобедренный и $\angle CPL = \angle CLP$. Тогда равны и смежные им углы SPL и CLM. Треугольники SPL и CLM равны по первому признаку, а значит $\angle PLS = \angle LMC$. Но углы PLS и MLT равны как вертикальные, тогда $\angle MLT = \angle LMC$, откуда следует, что треугольник MTL — равнобедренный и $MT = LT$.



Критерии проверки решения

Содержание критерия	**Кол-во баллов**
Доказано, что треугольники SPL и CLM равны	3 балла
Полное обоснованное решение	7 баллов

6. По кругу расположены 8 лампочек, некоторые из которых включены, а некоторые выключены. За один ход можно выбрать две соседние лампочки и переключить их в противоположное состояние. Пете завязывают глаза, и он не видит, какие лампочки включены (в том числе изначально), но может говорить, какую пару лампочек переключить. Если в какой-то момент будет включена ровно половина лампочек, то Пете разрешают посмотреть, какие лампочки включены в данный момент. Задача Пети — не более чем за 25 ходов определить, можно ли такими ходами добиться, чтобы все лампочки были либо одновременно включены, либо одновременно выключены. Помогите Пете это сделать.

Решение

Всего возможны четыре изначальных соотношения по количеству включенных и выключенных лампочек: $1–7$, $2–6$, $3–5$ и $4–4$ (неважно, какое из чисел в паре соответствует включенным, а какое выключенным лампочкам). Будем называть нечетными соотношениями — $1–7$ и $3–5$, а четными — $2–6$, $4–4$ (а также $0–8$, про которое задан вопрос в условии).

Если мы переключаем две включенные лампочки, то включенных лампочек становится на две меньше, а выключенных — на две больше (аналогично для двух выключенных лампочек). Если мы переключаем одну включенную и одну выключенную лампочку, то количество лампочек в каждом состоянии не меняется. Таким образом, четность количеств включенных и выключенных лампочек не меняется, а значит, из нечетного соотношения с помощью ходов из условия никогда нельзя получить четное и наоборот.

Покажем, как Петя может не более чем за 16 ходов узнать, является текущее соотношение лампочек четным или нечетным. Если включенных и выключенных лампочек поровну, то ему сразу покажут, какие лампочки горят. Если же лампочек в каком-то состоянии больше, то найдутся две подряд идущие лампочки в этом состоянии. Пусть Петя по очереди переключит по два раза пары лампочек $(1; 2)$, $(2; 3)$, …, $(7; 8)$, $(8; 1)$. Хотя бы одна из этих пар находится в одинаковом состоянии, а значит, если бы изначальное соотношение было $2–6$, то после какого-то из переключений оно бы стало $4–4$ и, Пете бы показали, какие лампочки горят. Если это произошло, то соотношение лампочек четное, если нет — нечетное.

Если соотношение оказалась нечетным, то добиться того, чтобы лампочки были либо все включены, либо все выключены, не получится, так как из нечетного соотношения нельзя получить четное $(0; 8)$.

Если соотношение оказалось четным, то всегда можно добиться требуемого. Посмотрим на 1-ю лампочку, допустим, она включена. Если 2-я лампочка выключена, то переключим пару $(2; 3)$. Теперь включены первые две лампочки. Аналогично посмотрим, включена ли 3-я лампочка, и если нет, то переключим пару $(3; 4)$. Таким образом, когда включены i первых лампочек, то, если $(i + 1)$-я лампочка выключена, переключим пару $(i + 1; i + 2)$, иначе перейдем к следующему шагу. Не более чем через 7 ходов мы добьемся того, что первые 7 лампочек будут включены. Так как соотношение было четным, то 8-я лампочка не может оказаться выключенной, значит, будут включены все лампочки. (Случай, когда 1-я лампочка изначально выключена, разбирается аналогично.)

Критерии проверки решения

Содержание критерия	Кол-во баллов
Приведен некоторый алгоритм, но нет обоснования, почему он позволяет Пете выполнить задуманное	0 баллов

Доказано, что из нечетного соотношения нельзя получить четное (или нельзя добиться того, чтобы все лампочки были включены или выключены)	2 балла
Доказано, что при четном соотношении всегда можно добиться того, чтобы все лампочки были включены или выключены	2 балла
Приведен и обоснован алгоритм, как Петя может определить, является ли соотношение лампочек четным или нечетным	3 балла
Полное обоснованное решение	7 баллов

6 класс

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. За круглым столом сидели 20 рыцарей. Они поссорились, и между каждыми двумя рыцарями, не сидящими рядом, произошел поединок. Сколько всего поединков состоялось?

Ответ. 170.

Решение

Каждый рыцарь провел поединки со всеми, кроме себя самого и своих соседей, то есть по $20 - 3 = 17$ поединков. При этом в каждом поединке участвовало ровно два рыцаря, значит, всего состоялось $17 \cdot 20 : 2 = 170$ поединков.

Критерии проверки решения

Содержание критерия	Кол-во баллов
Приведен только верный ответ без пояснений	1 балл
Приведена верная формула для получения ответа	Не менее 4 баллов
Полное обоснованное решение	7 баллов

2. Два разбойника разделили между собой клад, состоящий из сорока двух изумрудов массами $1, 2, \ldots, 41$ и 42 карата. Докажите, что хотя бы у одного из них точно найдутся два изумруда, масса которых различается на 8 или на 10 карат.

Решение

Предположим, что это не так. Тогда любые два изумруда, массы которых различаются на 8 карат, должны достаться разным разбойникам. Пусть, например, 1-й изумруд достался первому разбойнику. Тогда 9-й изумруд достался второму, 17-й — снова первому, 25-й — второму, 33-й — первому и 41-й — второму.

С другой стороны, любые два изумруда, массы которых различаются на 10 карат, тоже должны доставаться разным разбойникам. Тогда если 1-й изумруд достался первому разбойнику, то 11-й — второму, 21-й — первому, 31-й — второму и 41-й — первому.

Таким образом, с одной стороны, 41-й изумруд должен достаться второму разбойнику, а с другой стороны — первому. Противоречие.

Критерии проверки решения

Содержание критерия	Кол-во баллов
Любое решение, основанное на том, что клад разделен поровну	0 баллов
Полное обоснованное решение	7 баллов

3. Четверо ленивцев устроили забег по 450-метровой прямой беговой дорожке, сбоку которой через каждые 50 метров стоят фонарные столбы. Каждый ленивец начал забег с какого-то места дорожки и закончил, когда устал. Известно, что суммарно они пробежали 1250 метров. Докажите, что мимо какого-то из столбов пробежали хотя бы три ленивца.

Решение

Всего на дорожке стоит $450 : 50 - 1 = 8$ столбов, мимо которых могли пробежать ленивцы. Пусть количества столбов, мимо которых пробежали ленивцы, равны k_1, k_2, k_3 и k_4 соответственно, а расстояния, которые они пробежали, равны соответственно S_1, S_2, S_3 и S_4.

Расстояние, которое пробежал ленивец, равно расстоянию между двумя крайними столбами, мимо которых он пробежал, плюс не более чем по 50 метров в каждую сторону (то есть не более чем до каждого из следующих столбов в любую сторону). Тогда $S_1 \le 50(k_1 - 1) + 100 = 50k_1 + 50$, $S_2 \le 50k_2 + 50$, $S_3 \le 50k_3 + 50$, $S_4 \le 50k_4 + 50$.

Получаем:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \le 50(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + 200.$$

По условию $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 1250$, тогда:

$$1250 \le 50(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + 200,$$
$$1050 \le 50(k_1 + k_2 + k_3 + k_4),$$
$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \ge 21.$$

Значит, суммарное количество всех «пробеганий» мимо столбов не менее 21. Если бы мимо каждого столба пробежало не более двух ленивцев, то «пробеганий» было бы не больше $2 \cdot 8 = 16$, что меньше, чем 21. Значит, мимо какого-то из столбов пробежало хотя бы три ленивца.

Примечание

Участникам было дано общее разъяснение, что в начале и в конце дорожки столбов нет. Однако если считать, что столбов 10, то доказательство остается корректным, так как $2 \cdot 10 = 20 < 21$, и такой вариант решения тоже засчитывался.

Критерии проверки решения

Содержание критерия	Кол-во баллов
Любое решение, основывающееся на рассмотрении некоторого частного случая	0 баллов
Полное обоснованное решение	7 баллов

4. Вокруг очень большого костра сели 2026 мальчиков и девочек. Девочки все честные, а мальчики всегда врут. Каждый из ребят произнес следующую фразу: «Если не учитывать меня и моих соседей, то девочек у костра меньше двух». Сколько девочек могло сидеть у костра?

Ответ. 3.

Решение

Если бы ни одной девочки не было, то каждый мальчик сказал бы правду, что невозможно. Если бы не было ни одного мальчика, то все девочки бы врали. Значит у костра хотя бы одна девочка и хотя бы один мальчик, и, более того, найдутся сидящие рядом мальчик и девочка.

Так как девочка из этой пары говорит правду и среди ее соседей не более одной девочки, то всего девочек не больше, чем она, ее возможная соседка и еще одна девочка. Тогда девочек не более трех.

Рассмотрим теперь мальчика из этой пары. Так как он врет, то должно быть хотя бы две девочки кроме его соседки, а значит всего девочек не менее трех.

Таким образом, девочек может быть только три.

Пример: три девочки сидят подряд, а остальные сидящие — мальчики.

Критерии проверки решения

Содержание критерия	**Кол-во баллов**
Приведены верный ответ и пример	2 балла
Доказано, что девочек не меньше 3	2 балла
Доказано, что девочек не больше 3	2 балла
Полное обоснованное решение	7 баллов

* *Первые три критерия суммируются*

5. За каждые полные 100 рублей покупки, оплаченные банковской картой, банк начисляет 1 бонусный балл (то есть, например, и за покупку на сумму 714 рублей, и за покупку на сумму 798 рублей будет начислено по 7 бонусных баллов). Какое наибольшее количество бонусных баллов можно заработать, имея 8500 рублей и покупая только тетради по 81 рублю и обложки по 33 рубля за штуку? (Бонусные баллы тратить нельзя.)

Ответ. 84 балла.

Решение

<u>Оценка.</u> Располагая суммой 8500 рублей, можно заработать не более 85 бонусных баллов. Чтобы заработать ровно 85 баллов, нужно потратить ровно всю сумму. Заметим, что стоимости товаров — 81 рубль и 33 рубля — делятся на 3, тогда и общая сумма покупки должна делиться на 3. Однако 8500 не делится на 3, а значит, потратить ровно 8500 рублей не получится. Тогда можно заработать не более 84 бонусных баллов.

<u>Пример.</u> Купим 104 тетради, потратив на это $81 \cdot 104 = 8424$ рублей, и получим с этой покупки 84 бонусных балла.

Примечание

Поскольку каждый товар стоит меньше 100 рублей, очевидно, ими можно набрать любую нужную сумму с округлением до 100 вниз. Подобные рассуждения без предъявления конкретного количества товаров также засчитывались как верное обоснование существования примера.

Критерии проверки решения

Содержание критерия	**Кол-во баллов**
Только приведен верный пример на 84 бонусных балла	1 балл

Только доказано, что бонусных баллов не более 84	4 балла
Полное обоснованное решение	7 баллов

5 класс

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

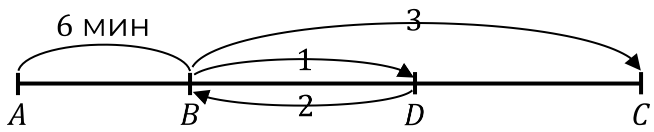
1. Грека на коне въехал на мост через реку. Через 6 минут он решил сунуть в реку руку, где его мгновенно цапнул рак. Укушенный Грека вскочил на коня и галопом помчался дальше в два раза быстрее, чем ехал до этого. Проехав половину оставшейся части моста, он решил отомстить раку, развернулся и, не сбавляя скорости, поскакал обратно к месту, где рак его цапнул. Но того уже и след простыл, и понурый Грека снова поехал в изначальном направлении с исходной скоростью. На все путешествие от начала до конца моста Грека потратил 24 минуты. Какую часть моста Грека проехал до того, как рак его цапнул?

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Решение

Обозначим на схеме точкой A — начало моста, B — место встречи Греки и рака, C — конец моста. Середину отрезка BC обозначим точкой D. Пусть изначальная скорость Греки равна v.

После того, как Греку цапнул рак, Грека проехал отрезки BD, DB и BC.



Так как $BD = DC$, то можно считать, что Грека проехал два раза отрезок BC: один раз со скоростью $2v$, а второй раз со скоростью v. Тогда на этот путь он затратил $\frac{3}{2}$ от того времени, которое бы понадобилось, если бы он проехал отрезок BC с изначальной скоростью. Так как он затратил $24 - 6 = 18$ минут, то, чтобы проехать отрезок BC с изначальной скоростью, понадобилось бы $\frac{2}{3} \cdot 18 = 12$ минут.

Таким образом, время, затрачиваемое на то, чтобы проехать отрезок AB, в два раза меньше времени, затрачиваемого на то, чтобы проехать отрезок BC, а значит, отрезок AB составляет $\frac{1}{3}$ от всей длины моста.

Критерии проверки решения

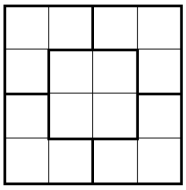
Содержание критерия	Кол-во баллов
Приведен только верный ответ	1 балл
Посчитано, сколько минут тратит Грека на преодоление пути от места встречи до конца моста	4 балла
Полное обоснованное решение	7 баллов

2. Можно ли разрезать клетчатую доску 4×4 по линиям сетки на пять частей, имеющих одинаковый **периметр**?

Ответ. Можно.

Решение

См. рисунок. Периметр каждой части равен 8 клеткам.



Критерии проверки решения

Содержание критерия	Кол-во баллов
Приведен любой пример, в котором не выполнены требования условия	0 баллов
Приведен любой подходящий пример	7 баллов

3. Решите ребус:

$$\text{МЦД} \times 5 = \text{ШЦПМ}$$

(Одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, разными — разные.)

Ответ. $593 \times 5 = 2965$; $597 \times 5 = 2985$.

Решение

1) Так как ШЦПМ – это результат умножения МЦД на 5, то последняя цифра, то есть М, может обозначать только 0 или 5. Начинаться с 0 число не может, значит, $\text{М} = 5$.

Получаем $5\text{ЦД} \times 5 = \text{ШЦП}5$.

2) $5\text{ЦД} \times 5 > 500 \cdot 5 = 2500$ и $5\text{ЦД} \times 5 < 600 \cdot 5 = 3000$. Тогда Ш может быть равно только 2.

Получаем $5\text{ЦД} \times 5 = 2\text{ЦП}5$.

3) Так как $5\text{ЦД} \cdot 5 \geq 2500$ и разные буквы обозначают разные цифры, то $\text{Ц} \geq 6$.

Если $\text{Ц} = 6$, то $56\text{Д} \cdot 5 \geq 560 \cdot 5 = 2800$, тогда $\text{Ц} \geq 8$. Не подходит.

Если $\text{Ц} = 7$, то $57\text{Д} \cdot 5 \geq 570 \cdot 5 = 2850$, тогда $\text{Ц} \geq 8$. Не подходит.

Если $\text{Ц} = 8$, то $58\text{Д} \cdot 5 \geq 580 \cdot 5 = 2900$, тогда $\text{Ц} \geq 9$. Не подходит.

Тогда $\text{Ц} = 9$. Получаем $59\text{Д} \times 5 = 29\text{П}5$.

4) Так как на конце произведения стоит цифра 5, то Д обозначает нечетную цифру. При этом цифры 5 и 9 уже заняты.

Если $\text{Д} = 1$, то $591 \times 5 = 2955$, что невозможно, так как $\text{Д} = \text{П}$.

Если $\text{Д} = 3$, то $593 \times 5 = 2965$, значит, $\text{П} = 6$.

Если $\text{Д} = 7$, то $597 \times 5 = 2985$, значит, $\text{П} = 8$.

Получаем два возможных варианта: $593 \times 5 = 2965$ и $597 \times 5 = 2985$.

Критерии проверки решения

Содержание критерия	Кол-во баллов
Приведен один из двух верных вариантов ответа	1 балл
Приведены оба верных варианта ответа	2 балла
Полное обоснованное решение	7 баллов

4. У короля пять детей. Все они обучены высоким манерам и говорят правду, кроме принца Вруни, который через раз врет. Заморские гости привезли королевским детям подарки: два меча, две диадемы и один плащ. Известно, что меч хотят только принцы, диадему — только принцессы, а плащ хотят все. Король по очереди показывал каждый подарок и спрашивал, кто из детей его хочет? Выяснилось, что первый подарок хотят двое, второй — четверо, третий — трое, четвертый — один, а пятый — трое детей. В каком порядке король показывал подарки?

Ответ. 1 — меч, 2 — плащ, 3 — диадема, 4 — меч, 5 — диадема.

Решение

Плащ хотят все, значит, все пятеро должны были ответить «Да», но Вруни соврал, значит ответов «Да» должно быть 4. Такое было только на втором вопросе, значит, второй подарок – это плащ.

Если Вруни соврал на втором вопросе, то соврал и на четвертом, а на остальных ответил правду. На третьем и пятом вопросе Вруни сказал правду, значит, третий и пятый подарок хотят трое. Если бы эти подарки были разные, их бы хотело разное количество детей, так как принцев и принцесс не может быть одинаковое количество. Тогда эти подарки одинаковые.

Значит, одинаковые и первый, и четвертый подарки. На первом вопросе, когда Вруни сказал правду, этот подарок хотело двое детей, а на четвертом, когда Вруни соврал, — уже один. Значит, на самом деле Вруни хочет этот подарок, тогда это меч.

Значит, 1 и 4 подарки — это мечи, 2 — плащ, 3 и 5 — диадемы.

Критерии проверки решения

Содержание критерия	Кол-во баллов
Приведен только верный ответ	2 балла
Полное обоснованное решение	7 баллов

5. На доске нарисована таблица 3×3. Марк и Майя вписывают в нее числа от 1 до 9 (при этом числа не должны повторяться). Майя первой вписывает сразу шесть чисел, а Марк после нее — оставшиеся три. Задача Майи — добиться совпадения набора трех произведений чисел по строкам с набором трех произведений чисел по столбцам, независимо от того, как будет расставлять свои числа Марк. Помогите Майе это сделать.

Решение

Пусть Майя впишет числа так, как показано на рисунке. Оставшиеся числа, которые впишет Марк, обозначим как a, b и c.

1	8	c
6	b	4
a	3	2

Тогда набор произведений по строкам — $8c$, $24b$ и $6a$, а по столбцам — $6a$, $24b$ и $8c$, что одно и то же, независимо от того, в каком порядке Марк расставит оставшиеся числа.

Критерии проверки решения

Содержание критерия	**Кол-во баллов**
Любой пример действий Майи, не позволяющий добиться требуемого в условии	0 баллов
Полное обоснованное решение	7 баллов

4 класс

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. Вставьте каждое из чисел от 1 до 9 по одному разу в квадратики так, чтобы получились верные равенства:

$$\square + \square + \square = 14,$$
$$\square - \square = 3,$$
$$\square + \square + \square + \square = 26.$$

(Не забудьте перенести полученный пример в работу!)

Решение.

$2 + 5 + 7 = 14,$

$4 - 1 = 3,$

$3 + 6 + 8 + 9 = 26.$

Критерии проверки решения

Содержание критерия	**Кол-во баллов**
Приведен любой пример, в котором не выполнены требования условия	0 баллов
Приведен любой подходящий пример	7 баллов

2. В одном сказочном лесу жили три поросенка — Ниф-Ниф, Наф-Наф и Нуф-Нуф. А в одном из деревьев жил Пятачок. Однажды утром соломенный домик Ниф-Нифа оказался разрушен. Тогда все поросята собрались на полянке и стали разбираться.

Ниф-Ниф: «Я не ломал свой домик!»

Нуф-Нуф: «Я не ломал домик. Это сделал Наф-Наф!»

Наф-Наф: «Я не ломал домик. Ниф-Ниф тоже».

Пятачок: «Я вообще тут ни при чем. А вот Нуф-Нуф точно врет!»

Известно, что в этом сказочном лесу действует правило: тот, кто разрушил домик, всегда лжет, а все остальные говорят только правду. Помоги разобраться, кто же на самом деле разрушил соломенный домик.

Решение

Способ 1

Составим таблицу, какие высказывания истинны, а какие ложны, в зависимости от того, кто сломал домик.

	Кто сломал домик			
Высказывание	**Ниф-Ниф**	**Нуф-Нуф**	**Наф-Наф**	**Пятачок**
Ниф-Ниф	Ложно	Истинно	Истинно	Истинно
Нуф-Нуф	Ложно	Ложно	Истинно	Ложно
Наф-Наф	Ложно	Истинно	Ложно	Истинно
Пятачок	Ложно	Истинно	Ложно	Ложно
Вывод	Не подходит	Подходит	Не подходит	Не подходит

Подходит только один вариант: домик сломал Нуф-Нуф.

Способ 2

Высказывания Нуф-Нуфа и Пятачка противоречат друг другу, значит, один из них врет. Тогда один из них и сломал домик.

Если домик сломал Пятачок, то Нуф-Нуф врет, так как говорит, что домик сломал Наф-Наф. Но Нуф-Нуф не может врать, потому что он не ломал домик. Тогда этот случай невозможен. Значит домик сломал Нуф-Нуф.

Критерии проверки решения

Содержание критерия	**Кол-во баллов**
Приведен только верный ответ	1 балл
Замечено только, что высказывания Нуф-Нуфа и Пятачка противоречат друг другу	2 балла
Приведен верный ответ и проведена проверка, что все высказывания в этом случае соответствуют условию	3 балла
В целом верное решение, но случай с Ниф-Нифом разобран неверно	4 балла
Полное обоснованное решение	7 баллов

3. Таня и Ярослав нашли 25 монет и выложили их на столе по кругу. Каждая монета лежала либо орлом, либо решкой вверх.

Ярослав сказал: «Смотри, Таня! Если мы перевернем некоторые монеты, то сможем сделать так, чтобы любые две соседние монеты лежали разными сторонами вверх».

Таня, поразмыслив, ответила: «А я думаю, что это вообще невозможно сделать!»

Кто из них прав? Объясните.

Ответ. Таня.

Решение

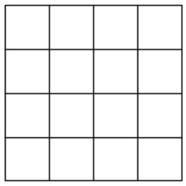
Посмотрим на ситуацию, о которой говорит Ярослав. После каждой монеты, лежащей орлом вверх, идет монета, лежащая решкой вверх, и наоборот. Значит, лежащие вверх орлом и лежащие вверх решкой монеты чередуются.

Значит, 1-я, 3-я, 5-я, ..., 25-я монеты будут лежать одинаковой стороной вверх. Но 1-я и 25-я монеты — соседние и должны лежать разными сторонами вверх. Поэтому сделать так, как говорит Ярослав, не получится.

Критерии проверки решения

Содержание критерия	**Кол-во баллов**
Приведен верный ответ; в обосновании есть явная отсылка к нечетности числа монет, но само обоснование недостаточное	3 балла
Полное обоснованное решение	7 баллов

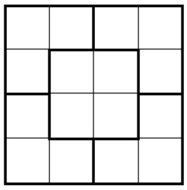
4. Разрежьте клетчатое поле 4×4 по линиям сетки на пять частей с одинаковым **периметром**.



(Не забудьте перенести полученный пример в работу!)

Решение.

См. рисунок. Периметр каждой части равен 8 клеткам.



Критерии проверки решения

Содержание критерия	**Кол-во баллов**
Приведен любой пример, в котором не выполнены требования условия	0 баллов
Приведен любой подходящий пример	7 баллов

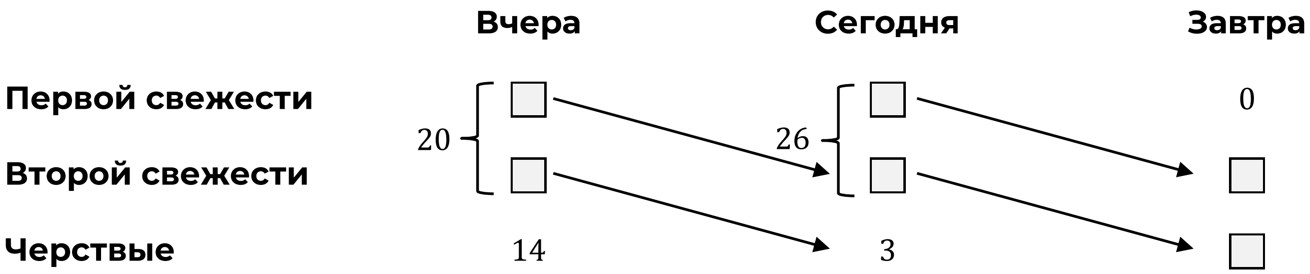
5. В кафе пекут блины. Первые два дня блин продается свежим. На третий день он черствеет, поэтому его продают за полцены — по 5 рублей, и если не продался, то после закрытия в этот же день выкидывают. Вчера на витрине было 20 свежих и 14 черствых блинов. Сегодня — 26 свежих и 3 черствых. Сколько за покупку всех блинов заплатят завтра, если выпекать новые блины завтра не планируется?

Ответ. 175 рублей.

Решение

Пусть блины, которые выпекли сегодня, — *первой свежести*, а блины, которые выпекли вчера, — *второй свежести*.

Нарисуем схему, соответствующую условию задачи:



1) Блины, которые были черствыми вчера и которые черствые сегодня, завтра продаваться не будут.

2) Сегодня черствыми стали 3 из 20 вчерашних свежих блинов, значит, вчера было 3 блина второй свежести.

3) $20 - 3 = 17$ (блинов) — были первой свежести вчера и станут черствыми завтра.

4) $26 - 17 = 9$ (блинов) — первой свежести сегодня и станут второй свежести завтра.

5) $5 \cdot 2 = 10$ (рублей) — стоит 1 свежий блин.

6) $9 \cdot 10 + 17 \cdot 5 = 90 + 85 = 175$ (рублей) — стоимость всех блинов завтра.

Значит, за покупку всех блинов завтра заплатят 175 рублей.

Критерии проверки решения

Содержание критерия	Кол-во баллов
Приведен только верный ответ	2 балла
Выяснено, сколько блинов было «второй свежести» вчера (то есть сколько испекли позавчера)	+ 1 балл
Выяснено, сколько блинов будут черствыми завтра	+ 1 балл
Выяснено, сколько блинов завтра станут «второй свежести» (то есть сколько испекли сегодня)	+ 1 балл
В целом верное решение, но содержит одну арифметическую ошибку	5 баллов
Полное обоснованное решение	7 баллов