

ПРИНЯТА

Педагогическим советом ОАНО «Школа ЦПМ»  
(протокол от 29 августа 2025 г. №123)

УТВЕРЖДЕНА

приказом директора ОАНО «Школа ЦПМ»  
от 29 августа 2025 г. №207/8-ОД25

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

по курсу внеурочной деятельности  
«Современные методы алгебры и геометрии»  
для обучающихся 11 класса

Составители:  
А.Д. Кузнецов  
И.А. Кухарчук

Андросов Александр Александрович  
sn=Андросов Александр  
Александрович, o=ОАНО Школа  
ЦПМ, ou=Директор,  
email=a.androsov@school-cpm.ru,  
c=RU  
2025.08.29 09:41:13 +03'00'

Москва, 2024 г.

## Пояснительная записка

В современном мире сферы применения математики расширяются, поэтому математические знания, как и математический стиль мышления становятся очень важными, а некоторых направлениях деятельности ключевыми, откуда вытекает необходимость более интенсивного и глубокого получения математических знаний, а также решения нестандартных и идейных задач. В процессе изучения математики в арсенал приёмов и методов мышления человека естественным образом включаются индукция и дедукция, обобщение и конкретизация, анализ и синтез, классификация и систематизация, абстрагирование и аналогия.

В рамках курса обучающимся необходимо не только применять знания и умения, приобретенные на уроках, но и самостоятельно совершать открытия, демонстрирующее красоту математической мысли и позволяющее пережить радость творчества и удовольствие от интеллектуальной деятельности. За 10 лет обучения математике у школьников уже сложился определенный багаж знаний и определенный математический стиль, в рамках которых они решают задачи. В 11 классе важно показать обучающимся, что математика не заканчивается на формуле, а проникает в нашу жизнь гораздо глубже, чем можно подумать, вглядываясь в уравнения в тетради. В этот период важно постоянно задавать школьникам вопросы, ответы на которые они могут получать самостоятельно, опираясь на их опыт, который ранее казался плохо применимым на практике.

Данный курс внеурочной деятельности рассчитан для школьников, которым хочется знать больше школьной программы, а также начать свой исследовательский путь в математике. Каждое занятие имеет определенную школьную базу, тем не менее объекты, рассматриваемые на курсе, гораздо сложнее для понимания, и требуют более глубокого и тщательного рассмотрения, для того чтобы стать понятными и применимыми в дальнейших решениях. В течении всего курса будут рассмотрены различные темы из алгебры, начала математического анализа, геометрии и других разделов математики, что покажет применение математики в разных сферах жизни и возможно решит профориентационные проблемы школьников, которые смогут глубже изучить некоторые процессы

Целью курса «Современные методы алгебры и геометрии» является системная подготовка учащихся 11 классов к математическим олимпиадам с помощью средств высшей математики, ориентированная на вовлечение школьников в математическую деятельность, создание базы для самостоятельных исследований, развитие мотивации, мышления, творческих способностей и за счет этого — достижение более высокого уровня их олимпиадной и общей математической подготовки.

Методологической основой реализации поставленной цели являются следующие принципы:

– Принцип развития, который состоит в том, что олимпиадная подготовка должна быть нацелена прежде всего на создание условий для всестороннего развития мышления и личностных качеств каждого ученика, а не ограничиваться тренингом в освоении ими методов олимпиадной математики. Суть этого принципа можно кратко выразить тезисом: «развитие средствами олимпиадной математики каждого ученика».

– Принцип «выращивания» состоит в совмещении, с одной стороны, внутренней активности ученика, его целенаправленных попыток раскрыть и реализовать свой потенциал, а с другой стороны, внешней организации этой активности со стороны учителя в рамках той же цели.

– Принцип успешности состоит в акцентировке на успешность, то есть в создании такой среды, где к ошибке относятся как к ступеньке роста, а не поводу для огорчения и порицания, где ценится и поддерживается успех каждого ученика относительно себя, независимо от начального уровня его подготовки и математических способностей.

### **Планируемые результаты освоения курса**

Освоение курса внеурочной деятельности «Современные методы алгебры и геометрии» обеспечивает достижение следующих предметных образовательных результатов:

– умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной форме, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры контрпримеры; критичность мышления, инициатива, находчивость, активность при решении математических задач; умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности; способность к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

– умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни;

– умение находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять ее в понятной форме, принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации;

– умение понимать и использовать математические средства наглядности (графики, диаграммы, таблицы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;

– умение выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки;

– умение применять индуктивные и дедуктивные способы рассуждений, видеть различные стратегии решения задач;

– понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом; умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем; умение планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера; первоначальные представления об идеях методах математики как универсальном языке науки и техники, средстве моделирования явлений и процессов.

## Содержание курса

### Раздел 1. Проективная прямая.

Ориентированный и направленный угол: разница понятий. Простые отношения трех точек на прямой. Простое отношение, в котором прямая делит угол. Формула связи между простым отношением тройки точек и простым отношением прямой и угла. Инвариантность простых отношений при центральном проектировании между параллельными прямыми.

Двойные отношения на прямой: определение и основные свойства. Инвариантность двойного отношения при центральном проектировании.

Понятие вещественной проективной прямой и бесконечно удаленной точки. Однородные координаты на ней.

### Раздел 2. Метод движения точек с сохранением двойных отношений.

Двойные отношения на окружности: корректность определения и основные свойства. Доказательство теоремы о бабочке.

Проективное преобразование  $\mathbb{R}P^1$ . Общий вид проективного преобразования прямой в однородных координатах.

Проективное преобразование  $\mathbb{R}P^1$  однозначно задается образами трех точек. Метод движения точек с сохранением двойных отношений: описание метода и примеры решения задач.

### Раздел 3. Подготовка к полиномиальному движению.

Элементы стереометрии: скалярное и векторное произведение.

Проективная плоскость  $\mathbb{R}P^2$ . Однородные координаты. Отношение инцидентности. Принцип двойственности.

Однородные многочлены. Однородный многочлен степени  $k$  восстанавливается по значениям в  $k$  попарно не пропорциональных точках.

### Раздел 4. Метод полиномиального движения точек.

Описание метода и основные леммы о степенях зависимости.

Примеры решения задач.

### Раздел 5. Комплексные числа в планиметрии.

Комплексные числа, разные формы записи: алгебраическая, тригонометрическая, геометрическая, экспоненциальная. Простые отношения. Базовые сведения комплексного счета в геометрии: уравнение прямой и хорды. Пример решения задачи.

Комплексная проективная прямая  $\mathbb{C}P^1$  и понятие бесконечно удаленной точки. Однородные координаты на ней. Двойные отношения четверки точек в  $\mathbb{C}P^1$  и уравнение принадлежности одной обобщенной окружности.

Дробно-линейные отображения и проективные преобразования  $\mathbb{C}P^1$ . ДЛО восстанавливается по образам трех точек. ДЛО распадается в композицию движений, поворотных гомотетий и инверсии + симметрии. Инвариантность углов при ДЛО.

Существование ДЛО, переводящего семейство соосных окружностей в семейство концентрических. Пример решения задачи.

### Раздел 6. Основные идеи и методы олимпиадной стереометрии.

Задачи на коллинеарность с использованием идеи компланарности.

Преобразования в пространстве: гомотетия и инверсия. Свойства инверсии и пример решения задачи с помощью них.

Замечательные точки тетраэдра, условия их существования. Вписанная и невписанная сферы.

Работа с геометрическими неравенствами.

### **Раздел 7. Элементы геометрии Лобачевского: модель Пуанкаре.**

Понятие группы преобразований. Примеры групп преобразований. Их инварианты. Аксиоматическое определение расстояния (метрики).

Существование ДЛО, сохраняющего круг и переводящего любую внутреннюю точку в его центр.

Модель Пуанкаре (конформно-евклидова модель). Построение расстояния. Определение «прямой». Измерение углов между «прямыми».

### **Раздел 8. Элементы геометрии Лобачевского: модель Бельтрами-Клейна.**

Проективная плоскость. Замены координат и проективные преобразования: их отличия. Общий вид проективного преобразования в однородных координатах (б/д). Шары Данделена и отсутствие различий в проективной геометрии между эллипсом, параболой и гиперболой.

Существование проективного преобразования, сохраняющего круг и переводящего любую внутреннюю точку в его центр.

Модель Бельтрами-Клейна (проективная модель). Построение расстояния. Определение «прямой». Измерение углов между «прямыми». Перпендикулярность. Ультраидеальные продолжения «прямых» имеют общую ультраидеальную точку (пример факта не из геометрии Лобачевского).

### **Раздел 9. Элементы геометрии Лобачевского: общая теория.**

Классические теоремы в геометрии Лобачевского: признаки равенства треугольников, о существовании ортоцентра, теорема Пифагора.

Пространство Минковского. Световой конус и вещественность расстояний на сфере. Эквивалентность моделей Пуанкаре и Бельтрами-Клейна.

### **Раздел 10. Изогональное сопряжение.**

Изогональное сопряжение в треугольнике. Лемма об изогоналях. Изогонально сопряженные пары, как фокусы вписанной коники. Изогонально сопряженные пары, как точки касания вписанной и невписанной сферы.

Изогональное сопряжение в четырехугольнике. Критерий существования изогонально сопряженной точки. Изогональное сопряжение как свойство тройки неупорядоченных пар точек.

### **Раздел 11. Начальные сведения о кубических прямых.**

Пространство  $CP^2$ . Теорема о числе точек пересечения двух алгебраических кривых (б/д). Теорема Шаля (б/д).

Определение операции сложения точек на кубике. Ассоциативность сложения. Переход от одного начала отсчета к другому.

Кубика фокусов (б/д). Круговые точки лежат на кубике фокусов (б/д). Пример решения задачи.

## 11 класс (136 ч)

№	Наименование раздела / темы	Количество ак. ч.	Ссылка на ЭОР
<b>1</b>	<b>Проективная прямая</b>	<b>12</b>	
1.1	Ориентированный и направленный угол: разница понятий. Простые отношения трех точек на прямой. Простое отношение, в котором прямая делит угол. Формула связи между простым отношением тройки точек и простым отношением прямой и угла. Инвариантность простых отношений при центральном проектировании между параллельными прямыми.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
1.2	Двойные отношения на прямой: определение и основные свойства. Инвариантность двойного отношения при центральном проектировании.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
1.3	Понятие вещественной проективной прямой и бесконечно удаленной точки. Однородные координаты на ней.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
<b>2</b>	<b>Метод движения точек с сохранением двойных отношений</b>	<b>12</b>	
2.1	Двойные отношения на окружности: корректность определения и основные свойства. Доказательство теоремы о бабочке.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
2.2	Проективное преобразование $RP1$ . Общий вид проективного преобразования прямой в однородных координатах.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
2.3	Проективное преобразование $RP1$ однозначно задается образами трех точек. Метод движения точек с сохранением двойных отношений: описание метода и примеры решения задач.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
<b>3</b>	<b>Подготовка к полиномиальному движению</b>	<b>12</b>	
3.1	Элементы стереометрии: скалярное и векторное произведение.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
3.2	Проективная плоскость $RP2$ . Однородные координаты. Отношение инцидентности. Принцип двойственности.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
3.3	Однородные многочлены. Однородный многочлен степени $k$ восстанавливается по значениям в $k$	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>

	попарно не пропорциональных точках.		
<b>4</b>	<b>Метод полиномиального движения точек</b>	<b>8</b>	
4.1	Описание метода и основные леммы о степенях зависимости.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
4.2	Примеры решения задач.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
<b>5</b>	<b>Комплексные числа в планиметрии</b>	<b>16</b>	
5.1	Комплексные числа, разные формы записи: алгебраическая, тригонометрическая, геометрическая, экспоненциальная. Простые отношения. Базовые сведения комплексного счета в геометрии: уравнение прямой и хорды. Пример решения задачи.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
5.2	Комплексная проективная прямая $CP^1$ и понятие бесконечно удаленной точки. Однородные координаты на ней. Двойные отношения четверки точек в $CP^1$ и уравнение принадлежности одной обобщенной окружности.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
5.3	Дробно-линейные отображения и проективные преобразования $CP^1$ . ДЛЮ восстанавливается по образам трех точек. ДЛЮ распадается в композицию движений, поворотных гомотетий и инверсии + симметрии. Инвариантность углов при ДЛЮ.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
5.4	Существование ДЛЮ, переводящего семейство соосных окружностей в семейство концентрических. Пример решения задачи.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
<b>6</b>	<b>Основные идеи и методы олимпиадной стереометрии</b>	<b>16</b>	
6.1	Задачи на коллинеарность с использованием идеи компланарности.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
6.2	Преобразования в пространстве: гомотетия и инверсия. Свойства инверсии и пример решения задачи с помощью них.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
6.3	Замечательные точки тетраэдра, условия их существования. Вписанная и невписанная сферы.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
6.4	Работа с геометрическими неравенствами.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
<b>7</b>	<b>Элементы геометрии Лобачевского: модель Пуанкаре</b>	<b>12</b>	
7.1	Понятие группы преобразований. Примеры групп преобразований. Их	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>

	инварианты. Аксиоматическое определение расстояния (метрики).		
7.2	Существование ДЛЮ, сохраняющего круг и переводящего любую внутреннюю точку в его центр.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
7.3	Модель Пуанкаре (конформно-евклидова модель). Построение расстояния. Определение «прямой». Измерение углов между «прямыми».	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
<b>8</b>	<b>Элементы геометрии Лобачевского: модель Бельтрами-Клейна</b>	<b>12</b>	
8.1	Проективная плоскость. Замены координат и проективные преобразования: их отличия. Общий вид проективного преобразования в однородных координатах (б/д). Шары Данделена и отсутствие различий в проективной геометрии между эллипсом, параболой и гиперболой.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
8.2	Существование проективного преобразования, сохраняющего круг и переводящего любую внутреннюю точку в его центр.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
8.3	Модель Бельтрами-Клейна (проективная модель). Построение расстояния. Определение «прямой». Измерение углов между «прямыми». Перпендикулярность. Ультраидеальные продолжения «прямых» имеют общую ультраидеальную точку (пример факта не из геометрии Лобачевского).	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
<b>9</b>	<b>Элементы геометрии Лобачевского: общая теория</b>	<b>8</b>	
9.1	Классические теоремы в геометрии Лобачевского: признаки равенства треугольников, о существовании ортоцентра, теорема Пифагора.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
9.2	Пространство Минковского. Световой конус и вещественность расстояний на сфере. Эквивалентность моделей Пуанкаре и Бельтрами-Клейна.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
<b>10</b>	<b>Изогональное сопряжение</b>	<b>8</b>	
10.1	Изогональное сопряжение в треугольнике. Лемма об изогоналях. Изогонально сопряженные пары, как фокусы вписанной коники. Изогонально сопряженные пары, как точки касания вписанной и невписанной сферы.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
10.2	Изогональное сопряжение в четырехугольнике. Критерий существования изогонально	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>

	сопряженной точки. Изогональное сопряжение как свойство тройки неупорядоченных пар точек.		
<b>11</b>	<b>Начальные сведения о кубических прямых</b>	<b>12</b>	
11.1	Пространство $CP^2$ . Теорема о числе точек пересечения двух алгебраических кривых (б/д). Теорема Шаля (б/д).	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
11.2	Определение операции сложения точек на кубике. Ассоциативность сложения. Переход от одного начала отсчета к другому.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
11.3	Кубика фокусов (б/д). Круговые точки лежат на кубике фокусов (б/д). Пример решения задачи.	4	<a href="http://www.rosolymp.ru">http://www.rosolymp.ru</a>
<b>Повторение</b>		<b>4</b>	
<b>Итоговая олимпиада</b>		<b>4</b>	
<b>ВСЕГО</b>		<b>136</b>	

### Учебно-методическое обеспечение образовательного процесса

#### Материалы для ученика

1. В.В.Прасолов. Геометрия Лобачевского (М: МЦНМО, 1995, 2000, 2004)
2. Д. Бродский. Движение точек (Летняя конференция турнира городов, 2022)
3. А. Заславский, П. Кожевников. Кубика фокусов и циркулярные кубики (Летняя конференция турнира городов, 2021)

#### Цифровые образовательные ресурсы сети Интернет

1. <http://www.rosolymp.ru> – Всероссийская олимпиада школьников
2. <http://school-collection.edu.ru/collection/matematika/> – материалы по математике в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов
3. <https://kvantik.com/> – журнал для любознательных школьников «Квантик»
4. <http://kvant.mcsme.ru/> – научно-популярный физико-математический журнал «Квант»
5. <https://www.turgor.ru/lktg/> – Летние конференции Турнира городов