Профильный экзамен по математике для 10 и 11 классов длится 235 минут (3 часа 55 минут) а и состоит из 7 заданий.

Задания №1-4 – это стандартные олимпиадные задачи по алгебре, геометрии, теории чисел и комбинаторике соответственно. Тематика примерно соответствует задачам регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников, уровень сложности – такой же или чуть проще.

Задание №5 – «техническое», проверяет навыки решения заданий перечневых олимпиад технического формата («Ломоносов», «Покори Воробьёвы горы!», «Физтех» и т.д.), а также ДВИ в вузы, по тематике и сложности им соответствует.

Задание №6 – теоретический вопрос, касающийся углублённой школьной программы или классических олимпиадных тем по математике. Необходимо сформулировать и доказать некоторое классическое утверждение.

Задача №7 – творческое. Нестандартное даже для формата олимпиад задание, требующее от экзаменуемого проявить креативность, показать свою математическую эрудицию и навыки soft skills применительно к математике. Например, найти ошибки в рассуждении, придумать задачу необходимого формата, привести пример математических задач, которые хорошо подойдут в той или иной ситуации и т.д.

Каждое задание оценивается из 10 баллов. Таким образом, всего за работу можно набрать 70 баллов, но итоговый результат не может быть больше, чем 60 баллов.

Демо-вариант экзамена для 10-11 классов

(В реальном экзамене варианты 10 и 11 класса могут отличаться 1-2 задачами)

1. **(10 баллов)** Саша записал на доске 10 действительных чисел, затем он увеличил каждое число на $\boldsymbol{d > 0}$ и произведение всех чисел не изменилось. Он опять их все увеличил на $\boldsymbol{d}$ и снова произведение всех чисел не изменилось. Какое максимальное число таких операций может провести Саша, чтобы произведение не изменилось?
2. **(10 баллов)** На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC нашлись такие точки M и N, что $BM=MN$ и $BC=CN$. Из точки A к окружности ω_1 (с центром M и радиусом MC) и к окружности ω_2 (с диаметром MN) проведены касательные AK_1 и AK_2 соответственно (K_1 и K_2 – точки касания). Докажите, что $AK_1=AK_2$.
3. **(10 баллов)** Найдите все натуральные t, при которых уравнение $x(x+t)=y^2$ не имеет решений в натуральных числах x и y.
4. **(10 баллов)** На олимпиаде школьники решали 6 задач. Оказалось, что никакие два из них не решили вместе всех задач, и каждую задачу решило ровно 100 школьников. При каком наименьшем числе школьников это возможно?
5. **(10 баллов)** Решите уравнение в действительных числах: $[x]+[2x]+[3x]+\cdots+[9x]+[10x]=2022$, где $[a]$ – целая часть a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a.
6. **(10 баллов)** Сформулируйте и докажите малую теорему Ферма.

7. **(10 баллов)** Найдите все ошибки и неточности в приведённом «решении» задачи и решите её корректно.

Задача. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-2a+3)^2+(y-a)^2=2{,}25 \\ (x+3)^2+(y-a)^2=a^2+2a+1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

«Решение». Ответ: $a=2{,}5$. Заметим, что перед нами уравнения двух окружностей на плоскости xOy: радиуса 1,5 с центром $(2a-3; a)$ и радиуса $\sqrt{a^2+2a+1}=a+1$ с центром $(-3; a)$. Чтобы система имела ровно одно решение, эти окружности должны касаться. Это равносильно тому, что расстояние между их центрами равно сумме их радиусов. Поскольку по оси ординат центры имеют одинаковые координаты, расстояние между ними будет равно разности абсцисс, то есть $\rho=2a-3-(-3)=2a=a+1+1{,}5$, откуда $a=2{,}5$.

Решения заданий демо-варианта

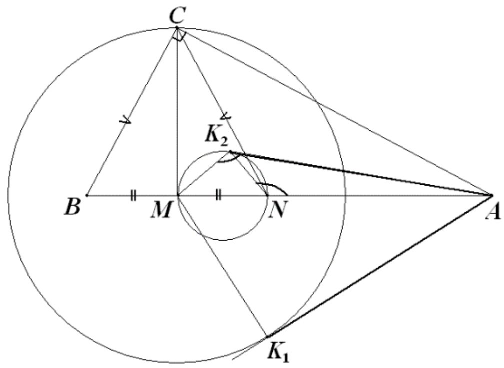
1. Саша записал на доске 10 действительных чисел, затем он увеличил каждое число на $\boldsymbol{d>0}$ и произведение всех чисел не изменилось. Он опять их все увеличил на $\boldsymbol{d}$ и снова произведение всех чисел не изменилось. Какое максимальное число таких операций может провести Саша, чтобы произведение не изменилось?

Ответ: 9 операций. **Решение.** Пусть удалось провести n таких операций. Тогда на t-м шаге будет произведение: $(a_1+dt)(a_2+dt)\ldots(a_{10}+dt)=a_1a_2\ldots a_{10}$ – произведение чисел нашего изначального набора, где t – натуральное число от 1 до n. После раскрытия скобок, вычитания $a_1a_2\ldots a_{10}$, вынесения за скобки и сокращения на $dt>0$ получится некий многочлен 9-й степени, зависящий от положительной переменной t. Но многочлен 9-й степени имеет максимум 9 различных корней, значит, и t может принимать не более 9 значений. Пример набора на 9 операций: возьмём числа 0, $-d$, $-2d$, -3d, …, $-9d$, тогда на каждом шаге наше произведение равно 0.

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC нашлись такие точки M и N, что $BM=MN$ и $BC=CN$. Из точки A к окружности ω_1 (с центром M и радиусом MC) и к окружности ω_2 (с диаметром MN) проведены касательные AK_1 и AK_2 соответственно (K_1 и K_2 – точки касания). Докажите, что $AK_1=AK_2$.

Решение. Так как AK_2 – касательная, то из свойств вписанных углов следует, что треугольники AMK_2 и ANK_2 подобны. Тогда $AK_2^2=AM\cdot AN=AM\cdot(AM-MN)=AM^2-$

$AM \cdot MN = AM^2 - AM \cdot BM = AM^2 - CM^2 = AM^2 - MK_1^2 = AK_1^2$, откуда и следует нужное нам равенство $AK_1 = AK_2$. (Мы воспользовались равенством $AM \cdot BM = CM^2$, т.к. CM – высота из вершины прямого угла.)



3. Найдите все натуральные t, при которых уравнение $x(x+t) = y^2$ не имеет решений в натуральных числах x и y.

Ответ: 1, 2, 4. **Решение.** Легко видеть, что $x^2 < x(x+1) < x(x+2) < (x+1)^2$, $x^2 < x(x+4) < (x+2)^2$, но $x(x+4) \neq (x+1)^2$. Пусть теперь t не равно 1, 2 и 4. Тогда t либо имеет нечетный делитель: $t = (2k+1)m$, либо делится на 8: $t = 8m$. В первом случае возьмем $x = mk^2$, $y = mk(k+1)$, во втором случае возьмем $x = m$, $y = 3m$.

4. На олимпиаде школьники решали 6 задач. Оказалось, что никакие два из них не решили вместе всех задач, и каждую задачу решило ровно 100 школьников. При каком наименьшем числе школьников это возможно?

Ответ: 200 школьников. **Решение.** Если школьников менее 200 (а всего предъявлено 600 решений), то по принципу Дирихле найдётся школьник N, решивший хотя бы 4 задачи (но, согласно условию, не все 6). Если N решил 5 задач, то вместе с любым школьником, решившим оставшуюся задачу, он составит «запретную» пару, противоречащую условию. Если он решил 4 задачи, то по оставшимся двум задачам среди 200 решений, предъявленных не более чем 198 школьниками, найдутся два решения, принадлежащих одному и тому же школьнику, который вместе с N составит «запретную» пару. Противоречие, значит, всего в олимпиаде участвовало не менее 200 школьников. Приведём пример. Возьмём 4 группы по 50 человек, каждый решил по 3 задачи – группа A решила 1, 2 и 3 задачи; B – 1, 4 и 5; C – 2, 4 и 6; D – 3, 5 и 6.

5. Решите уравнение в действительных числах: $[x] + [2x] + [3x] + \cdots + [9x] + [10x] = 2022$, где $[a]$ – целая часть a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a.

Ответ: $x \in \left[36\frac{6}{7}; 36\frac{7}{8}\right)$. **Решение.** Пусть $x = n + a$, где $n = [x]$ – любое целое число, $a = \{x\} = x - [x]$ – любое число из полуинтервала [0; 1). Тогда $[x] + [2x] + \cdots + [9x] + [10x] = [n+a] + [2n+2a] + \cdots + [9n+9a] + [10n + 10a] = n + 2n + \cdots + 10n + [2a] + [3a] + \cdots + [10a] = 55n + [2a] + [3a] + \cdots + [10a] = 2022$. Заметим, что $0 \leq [ka] \leq k-1$ (для всех k от 2 до 10). Значит, $0 \leq [2a] + [3a] + \cdots + [10a] \leq 45$. Таким образом, $1977 \leq 55n \leq 2022$. Поскольку n – целое, $55n$ кратно 55. На этом отрезке только число 1980 кратно 55, поэтому $n = 36$ определяется однозначно. Итак, $[2a] + [3a] + \cdots + [10a] = 2022 - 1980 = 42$. То есть величина $[2a] + [3a] + \cdots + [10a]$ на $45 - 42 = 3$ меньше своего возможного максимума. Исследуем, как ведёт себя функция $f(a) = [2a] + [3a] + \cdots + [10a]$ на полуинтервале [0; 1). В нуле $f(a) = 0$, в малой окрестности единицы $f(a) = 45$. Понятно, что $f(a)$ является неубывающей, её график имеет форму «лесенки» с плоскими ступенями и резкими скачками в точках вида $\frac{k}{2}, \frac{k}{3}, \dots, \frac{k}{10}$. Последние три скачка происходят за $\frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}$ до единицы и имеют величину 1. Четвёртый скачок с конца происходит за $\frac{1}{7}$ до единицы и тоже имеет величину 1. Поэтому на полуинтервале $\left[\frac{6}{7}; \frac{7}{8}\right)$ значение $f(a)$ будет равно 42, в левой окрестности точки $\frac{6}{7}$ будет 41, а в точке $\frac{7}{8}$ и её правой окрестности – 43.)

6. Сформулируйте и докажите малую теорему Ферма.

Формулировка. Пусть p – простое число, и a – целое число, не кратное p. Тогда $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$.

Доказательство. Рассмотрим числа $a, 2a, \dots, (p-1)a$. Разность любых двух из них равна $ka - la = (k-l)a$ и может делиться на p только если $k-l$ кратно p, так как a и p взаимно просты по условию. Но $|k-l| < p$, а потому $k-l$ может делиться на p только если $k-l=0$, то есть $k=l$. Значит, разность любых двух из этих $(p-1)$ чисел не делится на p, а это означает, что они дают попарно различные остатки при делении на p (причём ненулевые, так как ka делится на p если k делится на p, но $1 < k < p$). Таких остатков $(p-1)$, чисел – тоже, значит, они дают все возможные остатки от 1 до $(p-1)$ по модулю p ровно по одному разу. Значит, $a \cdot 2a \cdot \dots \cdot (p-1)a = a^{p-1}(p-1)! \equiv 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) = (p-1)! \ (mod\ p)$. Поскольку $(p-1)!$ для простого p взаимно просто с p, то, сократив сравнение на $(p-1)!$, получим, что $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$, что и требовалось.

7. Найдите все ошибки и неточности в приведённом «решении» задачи и решите её корректно.

Задача. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-2a+3)^2 + (y-a)^2 = 2{,}25 \\ (x+3)^2 + (y-a)^2 = a^2 + 2a + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

«Решение». Ответ: $a = 2{,}5$. Заметим, что перед нами уравнения двух окружностей на плоскости xOy: радиуса 1,5 с центром $(2a-3; a)$ и радиуса $\sqrt{a^2+2a+1} = a+1$ с центром $(-3; a)$. Чтобы система имела ровно одно решение, эти окружности должны касаться. Это равносильно тому, что расстояние между их центрами равно сумме их радиусов. Поскольку по оси ординат центры имеют одинаковые координаты, расстояние между ними будет равно разности абсцисс, то есть $\rho = 2a - 3 - (-3) = 2a = a + 1 + 1{,}5$, откуда $a = 2{,}5$.

Решение. Условие задачи корректно, ответ и «решение» – неверные. У этого решения сразу три существенных проблемы, причём все они ещё и влияют на ответ. Во-первых, радиус второй окружности равен $\sqrt{a^2 + 2a + 1} = \sqrt{(a + 1)^2} = |a + 1|$, а не просто $a + 1$. Во-вторых, окружности могут касаться также внутренним образом, что равносильно тому, что расстояние между их центрами равно модулю разности радиусов. В-третьих, расстояние между центрами (в случае равенства их ординат) равно не просто разности их абсцисс, а модулю разности. То есть получаем следующую совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} |a + 1| + 1{,}5 = |2a| \\ ||a + 1| - 1{,}5| = |2a| \end{array}\right.$$

Решая её (раскрывая модули с помощью метода интервалов), получаем четыре ответа: $a \in \{-\frac{5}{6}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{5}{2}\}$.