



Примеры заданий вступительных испытаний по
математико-информационному направлению

8 класс

Математика

1. **Алгебраические преобразования.** Известно, что $a + \frac{1}{a} = 3$. Найдите $a^4 + \frac{1}{a^4}$.

Решение: Легко видеть, что

$$a^4 + \frac{1}{a^4} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2 = \left(\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2\right)^2 - 2 = (3^2 - 2)^2 - 2 = 47.$$

2. **Линейные функции.** К какому числу ближе всего расстояние от начала координат до прямой $6x + 8y = 3$?

Решение: Найдём пересечения прямой с осями координат (приравнявая x и y попеременно к нулю): $x_0 = -\frac{1}{2}$, $y_0 = -\frac{3}{8}$. Расстояние между этими точками на осях найдём по теореме

Пифагора: $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{5}{8}$. Расстояние от начала координат до прямой можно

найти как высоту прямоугольного треугольника через формулу площади: $\frac{\frac{5}{8}h}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}}{2}$,

откуда $h = \frac{3}{10}$.

или

Пользуясь формулой расстояния от точки до прямой, получим, что это расстояние равно

$$\frac{|6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{3}{10}.$$

3. **Логика.** В комнате находятся 10 человек. Каждый из них либо рыцарь – всегда говорит правду, либо лжец – всегда лжет. Первый сказал: «Среди нас есть хотя бы один лжец». Второй сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 2». Третий сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 3». ... Десятый сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 10». Какое наибольшее количество рыцарей может быть в комнате?

Решение:



ШКОЛА ЦЕНТРА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

129272, Москва, Олимпийский проспект, д.11 стр.1. ИНН 9702004203, ОГРН 1197700011640,
КПП 770201001 эл. почта: info@school-cpm.ru тел: +7(495)118-36-62

4, под номерами 1, 2, 3, 6. Первый – очевидно, рыцарь. Значит, с одной стороны, лжецы есть. С другой стороны, их не более 9. Тогда последний – лжец. Легко понять, что и девятый – лжец (иначе лжецов 9, но, если это рыцарь, их не более, чем 8). Если восьмой – рыцарь, то лжецов – 8, то есть это все, кроме первого и восьмого. Но тогда второй и четвертый говорят правду, что невозможно, поэтому восьмой – лжец. Если седьмой – рыцарь, то лжецов 7 – все, кроме него, первого и ещё кого-то. Но число 7 – простое, так что больше никто рыцарем быть не может. Поэтому и седьмой – лжец. Если шестой – рыцарь, то лжецов – 6, и рыцарями являются также третий и второй. Этот случай подходит. Если же и шестой – лжец, то количество лжецов не делится на 10, 9, 8, 7, 6. Значит, их не более пяти. С другой стороны, их уже минимум 5. Значит, их ровно 5, но тогда есть рыцари, говорящие ложь (с четвертого по второго), что невозможно.

4. **Комбинаторика.** Сколькими способами можно составить команду из 1 вратаря, 4 защитников, 4 полузащитников и 2 нападающих, если в клубе 3 вратаря, 7 защитников, 6 полузащитников и 3 нападающих?

Решение: По определению числа сочетаний, и применяя правило произведения, имеем:

$$C_3^1 \cdot C_7^4 \cdot C_6^4 \cdot C_3^2 = 3 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 3 = 4725.$$

5. **Геометрия с дополнительными построениями.** В треугольнике ABC проведена медиана BM. На стороне BC отмечена точка K, отрезок AK пересекает BM в точке P. Оказалось, что BP = BK. Найдите отношение SK:MP. Умножьте полученное значение на 100 и округлите до ближайшего целого.

Решение: См. <https://olympiads.mccme.ru/mmo/2010/solutions.pdf> задача 8.3.

Ответ: $2/1 \cdot 100 = 200$.

6. **Задача на какую-либо специфическую "олимпиадную" тему.** В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрата разделился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

Решение: См. https://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=30796.

Ответ: 42.



ШКОЛА ЦЕНТРА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

129272, Москва, Олимпийский проспект, д.11 стр.1. ИНН 9702004203, ОГРН 1197700011640,
КПП 770201001 эл. почта: info@school-cpm.ru тел: +7(495)118-36-62

9 класс

Математика

1. Алгебраические преобразования. Известно, что $a + \frac{1}{a} = 3$. Найдите $a^4 + \frac{1}{a^4}$.

Решение: Легко видеть, что

$$a^4 + \frac{1}{a^4} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2 = \left(\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2\right)^2 - 2 = (3^2 - 2)^2 - 2 = 47.$$

2. Квадратичные функции. Сколько корней и каких по знаку будет иметь уравнение $ax^2+bx=c$ на отрезке $[-1; 1]$, если a, b, c - длины сторон некоторого треугольника?

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = ax^2 + bx - c$. Поскольку a, b, c - длины сторон некоторого треугольника, то эти числа положительные, а также удовлетворяют неравенствам треугольника: $a + b > c, b + c > a, c + a > b$. Заметим, что $f(1) = a + b - c > 0, f(-1) = a - b - c < 0, f(0) = -c < 0$. Значит, на отрезке $[-1; 1]$ будет равно 1 пересечение графика с осью абсцисс, причём оно будет расположено на интервале $(0; 1)$. Значит, ответ - 1 положительный корень.

Логика. В комнате находятся 10 человек. Каждый из них либо рыцарь - всегда говорит правду, либо лжец - всегда лжет. Первый сказал: «Среди нас есть хотя бы один лжец». Второй сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 2». Третий сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 3». ... Десятый сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 10». Какое наибольшее количество рыцарей может быть в комнате?

Решение: 4, под номерами 1, 2, 3, 6. Первый - очевидно, рыцарь. Значит, с одной стороны, лжецы есть. С другой стороны, их не более 9. Тогда последний - лжец. Легко понять, что и девятый - лжец (иначе лжецов 9, но, если это рыцарь, их не более, чем 8). Если восьмой - рыцарь, то лжецов - 8, то есть это все, кроме первого и восьмого. Но тогда второй и четвёртый говорят правду, что невозможно, поэтому восьмой - лжец. Если седьмой - рыцарь, то лжецов 7 - все, кроме него, первого и ещё кого-то. Но число 7 - простое, так что больше никто рыцарем быть не может. Поэтому и седьмой - лжец. Если шестой - рыцарь, то лжецов - 6, и рыцарями являются также третий и второй. Этот случай



ШКОЛА ЦЕНТРА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

129272, Москва, Олимпийский проспект, д.11 стр.1. ИНН 9702004203, ОГРН 1197700011640,
КПП 770201001 эл. почта: info@school-cpm.ru тел: +7(495)118-36-62

подходит. Если же и шестой – лжец, то количество лжецов не делится на 10, 9, 8, 7, 6. Значит, их не более пяти. С другой стороны, их уже минимум 5. Значит, их ровно 5, но тогда есть рыцари, говорящие ложь (с четвёртого по второго), что невозможно.

3. Комбинаторика. Сколькими способами можно составить команду из 1 вратаря, 4 защитников, 4 полузащитников и 2 нападающих, если в клубе 3 вратаря, 7 защитников, 6 полузащитников и 3 нападающих?

Решение: По определению числа сочетаний, и применяя правило произведения, имеем:

$$C_3^1 \cdot C_7^4 \cdot C_6^4 \cdot C_3^2 = 3 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 3 = 4725.$$

4. Геометрия с дополнительными построениями. В треугольнике ABC проведена медиана BM. На стороне BC отмечена точка K, отрезок AK пересекает BM в точке P. Оказалось, что BP = BK. Найдите отношение SK:MP. Умножьте полученное значение на 100 и округлите до ближайшего целого.

Решение: См. <https://olympiads.mccme.ru/mmo/2010/solutions.pdf> задача 8.3.

Ответ: $2/1 \cdot 100 = 200$.

5. Задача на какую-либо специфическую "олимпиадную" тему. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрата разделился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

Решение: См. https://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=30796.

Ответ: 42.

8-9 класс

Информатика

1. Можно ли расположить 15 одинаковых монет вдоль стенок большой квадратной коробки так, чтобы вдоль каждой стенки лежало ровно по 6 монет? (Если Вы считаете, что этого сделать нельзя, обоснуйте Ваш ответ, иначе приведите пример расположения монет)



ШКОЛА ЦЕНТРА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

129272, Москва, Олимпийский проспект, д.11 стр.1. ИНН 9702004203, ОГРН 1197700011640,
КПП 770201001 эл. почта: info@school-cpm.ru тел: +7(495)118-36-62

Решение: можно, например, следующим образом (число обозначает количество монет в стопке):

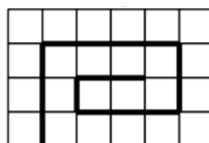
3	1	2
1		2
2	2	2

2. Вам нужно подняться по лестнице. За один раз можно подняться на одну или две ступеньки. Сколько существует способов добраться до 5-й ступеньки? (Напишите ответ на вопрос задачи)

Решение: мы можем стоять перед лестницей (назовем это ступенькой номер 0) и подняться на первую ступеньку одним способом. Для любой другой ступеньки с номером K количество вариантов вычисляется по формуле $d[K] = d[K - 1] + d[K-2]$ Пользуясь этим соотношением можно составить таблицу с количеством способов подняться в зависимости от номера ступеньки:

0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	5	8

3. Лужайка в парке имеет форму прямоугольника размером $a \times b$ метров, разбитого на квадраты со стороной 1 метр. Необходимо поставить внутри лужайки ограждения между некоторыми квадратами так, чтобы образовалась спиральная дорожка, закручивающаяся к центру лужайки. Определите длину такого ограждения. На рисунке изображена лужайка размером 4×6 и ограждение, которое необходимо поставить на ней. Длина ограждения для такой лужайки будет равна 15.



Ответом на эту задачу является некоторое выражение, которое может содержать целые числа, переменные a и b (записываемые английскими буквами), операции



ШКОЛА ЦЕНТРА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

129272, Москва, Олимпийский проспект, д.11 стр.1. ИНН 9702004203, ОГРН 1197700011640,
КПП 770201001 эл. почта: info@school-cpm.ru тел: +7(495)118-36-62

сложения (обозначается «+»), вычитания (обозначается «-»), умножения (обозначается «*»), деления (обозначается «/») и круглые скобки для изменения порядка действий. Запись вида «2a» для обозначения произведения числа 2 и переменной a неверная, нужно писать «2 * a». Пример правильного (по форме записи) выражения: $a + (b - a) * 2$.

Решение: при необходимости переориентируем лужайку так, чтобы сторона a была меньше либо равна, чем сторона b (как на рисунке). Рассмотрим вертикальные участки заборов: первый из них имеет длину a-1, второй a-2 и т.д. до единицы (в примере это будут длины 3, 2, 1). Рассмотрим горизонтальные участки: первый имеет длину b-2, второй b-3 и т.д. до b-a. Воспользовавшись формулой для подсчета суммы арифметической прогрессии получим длины горизонтальных участков $1+2+3+\dots+a = a*(a-1)/2$. Для вертикальных участков $(b-a)+(b-a-1)+\dots+(b-2)=(2b-a-2)*(a-1)/2$. Просуммируем и получим: $a*(a-1)/2 + (2b-a-2)*(a-1)/2 = (a+2b-a-2)*(a-1)/2 = (2b-2)*(a-1)/2 = (b-1)*(a-1)$

4. В клетки таблицы 3×3 вписаны числа от 1 до 9. Катя нашла сумму чисел в каждом из квадратов 2×2 , а затем сложила полученные суммы. Какова наименьшая возможная сумма этих четырёх сумм?

Решение: для каждой клетки квадрата 3×3 рассмотрим, сколькими квадратами 2×2 она накрывается:

1	2	1
2	4	2
1	2	1

Чтобы минимизировать сумму, необходимо размещать в клетках, накрытых наибольшим количеством квадратов, как можно меньшие числа. Например, это можно сделать так:

6	2	7
5	1	3



ШКОЛА ЦЕНТРА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

129272, Москва, Олимпийский проспект, д.11 стр.1. ИНН 9702004203, ОГРН 1197700011640,
КПП 770201001 эл. почта: info@school-cpm.ru тел: +7(495)118-36-62

9	4	8
---	---	---

Теперь достаточно умножить каждое число на количество его вхождений и посчитать сумму: $1*4 + (2 + 3 + 4 + 5)*2 + (6 + 7 + 8 + 9)*1 = 62$

5. В мастерской по изготовлению матрёшек работают резчики по дереву и художники. Один резчик может за день вырезать пять матрёшек, а один художник за день расписывает две матрёшки. Мастерская получила заказ на изготовление 200 матрёшек, который необходимо выполнить за 20 дней (каждую матрёшку необходимо вырезать и расписать). Какое наименьшее число резчиков и художников должно быть в мастерской, чтобы мастерская успела выполнить заказ вовремя?

Решение: За день мастерская должна производить не менее 10 матрёшек, поэтому необходимо не менее 2 резчиков и не менее 5 художников. Но при таком количестве резчиков они успевают изготовить 200 матрёшек ровно за 20 дней, и последние изготовленные матрёшки не успеют расписать художники, поэтому должно быть минимум три резчика. Аналогично, художники не смогут приступить к работе немедленно, поэтому на работу художникам также будет отведено менее 20 дней, значит, необходимо минимум 6 художников. 3 резчика изготовят 200 матрёшек за 14 дней, 6 художников распишут 200 матрёшек за 17 дней, поэтому работая одновременно они уложатся в 20 дней. Ответ: 3 резчика и 6 художников.

6. Мост через реку стоит на 15 опорах, обозначим их буквами латинского алфавита от А до О. Необходимо произвести ремонт опор моста, при разработке проекта ремонта была определена стоимость ремонта каждой опоры.

Опора	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Стоимость ремонта	10	5	20	10	30	40	30	30	30	50	100	2	10	3	20

Для того чтобы мост был надёжным, можно отремонтировать только часть опор, но с соблюдением следующих условий:

1. Крайние опоры (А и О) должны быть отремонтированы.
2. Не должно остаться двух стоящих рядом неотремонтированных опор.

Составьте план ремонта моста, при котором мост будет надёжным, то есть будут



ШКОЛА ЦЕНТРА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

129272, Москва, Олимпийский проспект, д.11 стр.1. ИНН 9702004203, ОГРН 1197700011640,
КПП 770201001 эл. почта: info@school-cpm.ru тел: +7(495)118-36-62

выполнены перечисленные выше условия, а стоимость ремонта будет минимальной.

Решение этой задачи нужно записать в виде перечисления букв, соответствующих опорам моста, которые нужно отремонтировать. Буквы нужно записывать в алфавитном порядке, каждая буква в ответе может встречаться не более одного раза. Например, ответ ABCDEFGHIJKLMNOP будет обозначать, что все опоры моста будут отремонтированы, но этот ответ, очевидно, не будет наилучшим.

Решение: Составим таблицу, в которой для каждой опоры рассчитаем стоимость ремонта моста с соблюдением условий с начала и до нее включительно, при этом текущая опора обязательно ремонтируется. Чтобы ремонт моста был корректным мы можем кроме текущей опоры отремонтировать либо непосредственно предыдущую, либо отстоящую на два. Из этих вариантов будем выбирать лучший и запоминать номер предыдущей отремонтированной опоры.

Опора	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Стоимость ремонта	10	5	20	10	30	40	30	30	30	50	100	2	10	3	20
Суммарная стоимость	10	15	30	25	55	65	85	95	115	145	215	147	157	150	170
Предыдущая опора	-	A	A	B	D	D	E	F	G	H	I	J	L	L	N

Восстановим ответ по таблице начиная с конца. Мы обязаны отремонтировать опору O, перед ней была отремонтирована опора N, перед ней опора K, перед ней опора J и т.д. Ответ с конца будет OMKJHFDVA, после разворота получаем ответ: ABDFHJLNO.