Автономная некоммерческая организация «Общеобразовательная школа Центра педагогического мастерства»

ШКОЛА ЦЕНТРА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

129272, Москва, Олимпийский проспект, д.11 стр.1. ИНН 9702004203, ОГРН 1197700011640, КПП 770201001 эл. почта: info@school-cpm.ru тел: +7(495)118-36-62

Примеры заданий для подготовки к вступительным испытаниям по математике

8 класс

1. **Алгебраические преобразования.** Известно, что $a + \frac{1}{a} = 3$. Найдите $a^4 + \frac{1}{a^4}$.

Решение: Легко видеть, что $a^4 + \frac{1}{a^4} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2 = \left(\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2\right)^2 - 2 = (3^2 - 2)^2 - 2 = 47$.

2. **Линейные функции.** К какому числу ближе всего расстояние от начала координат до прямой $6x + 8y = 3$?

Решение: Найдём пересечения прямой с осями координат (приравнивая x и y попеременно к нулю): $x_0 = -\frac{1}{2}, y_0 = -\frac{3}{8}$. Расстояние между этими точками на осях найдём по теореме Пифагора: $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{5}{8}$. Расстояние от начала координат до прямой можно найти как высоту прямоугольного треугольника через формулу площади: $\frac{\frac{5}{8}h}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}}{2}$, откуда $h = \frac{3}{10}$.

или

Пользуясь формулой расстояния от точки до прямой, получим, что это расстояние равно $\frac{|6\cdot 0 + 8\cdot 0 - 3|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{3}{10}$.

3. **Логика.** В комнате находятся 10 человек. Каждый из них либо рыцарь – всегда говорит правду, либо лжец – всегда лжет. Первый сказал: «Среди нас есть хотя бы один лжец». Второй сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 2». Третий сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 3». ... Десятый сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 10». Какое наибольшее количество рыцарей может быть в комнате?

Решение: 4, под номерами 1, 2, 3, 6. Первый – очевидно, рыцарь. Значит, с одной стороны, лжецы есть. С другой стороны, их не более 9. Тогда последний – лжец. Легко понять, что и девятый – лжец (иначе лжецов 9, но, если это рыцарь, их не более, чем 8). Если восьмой – рыцарь, то лжецов – 8, то есть это все, кроме первого и восьмого. Но тогда второй и четвёртый говорят правду, что невозможно, поэтому восьмой – лжец. Если седьмой – рыцарь, то лжецов 7 – все, кроме него, первого и ещё кого-то. Но число 7 – простое, так что больше никто рыцарем быть не может. Поэтому и седьмой – лжец. Если шестой – рыцарь, то лжецов – 6, и рыцарями являются также третий и второй. Этот случай подходит. Если же и шестой – лжец, то количество лжецов не делится на 10, 9, 8, 7, 6. Значит, их не более пяти. С другой стороны, их уже минимум 5. Значит, их ровно 5, но тогда есть рыцари, говорящие ложь (с четвёртого по второго), что невозможно.

4. **Комбинаторика.** Сколькими способами можно составить команду из 1 вратаря, 4 защитников, 4 полузащитников и 2 нападающих, если в клубе 3 вратаря, 7 защитников, 6 полузащитников и 3 нападающих?

ШКОЛА ЦЕНТРА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА
129272, Москва, Олимпийский проспект, д.11 стр.1. ИНН 9702004203, ОГРН 1197700011640, КПП 770201001 эл. почта: info@school-cpm.ru тел: +7(495)118-36-62

Решение: По определению числа сочетаний, и применяя правило произведения, имеем: $C_3^1 \cdot C_7^4 \cdot C_6^4 \cdot C_3^2 = 3 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 3 = 4725.$

5. **Геометрия с дополнительными построениями.** В треугольнике АВС проведена медиана ВМ. На стороне ВС отмечена точка K, отрезок AK пересекает ВМ в точке P. Оказалось, что BP = BK. Найдите отношение CK:MP. Умножьте полученное значение на 100 и округлите до ближайшего целого.
Решение: См. https://olympiads.mccme.ru/mmo/2010/solutions.pdf задача 8.3.
Ответ: 2/1·100 = 200.
6. **Задача на какую-либо специфическую "олимпиадную" тему.** В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрата разделился на треугольники. Сколько получилось треугольников?
Решение: См. https://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=30796.
Ответ: 42.
7. **Задача на делимость и остатки повышенной сложности.** Какой максимальный наибольший общий делитель может быть у чисел $5n + 8$ и $9n - 4$ при натуральном n?
Решение: Поскольку он также будет делителем числа $9 \cdot (5n + 8) - 5 \cdot (9n - 4) = 92$, то он не превосходит 92. При это 92 подходит. Например, при $n = 72$.
8. **Задача типа "оценка+пример" повышенной сложности.** Все клетки квадрата 4x4 раскрашиваются, каждая – одним из цветов имеющегося набора. Какое наибольшее количество цветов может быть использовано, если в любом квадрате 2x2 есть клетки одного цвета?

5	**1**	**6**	**7**
4	**1**	**1**	**1**
3	**3**	**2**	**8**
11	**10**	**2**	**9**

Решение: Всего клеток 16, но в каждом угловом квадрате 2x2 должны быть клетки одного цвета, так что цветов уже максимум 12. Если их ровно 12, то в каждом угловом квадрате все цвета различны, и тогда проблема с центральным квадратом 2x2. Значит, цветов не более 11, пример несложно построить с помощью принципа поворотной симметрии.
9. **Нестандартная задача дискретной математики.** Сколькими способами можно разрезать доску 2x16 на прямоугольники 1x2 и квадраты 2x2 (использовать можно любые из этих фигурок в любом количестве)?
Решение: Пусть $T_n -$ количество способов разрезать доску $2xn$. Заметим, что $T_n = T_{n-1} + 2T_{n-2}$, так как в конце ряда лежит либо вертикальная доминошка, либо две горизонтальных, либо квадрат. При малых значениях n определяем перебором: $T_1 = 1, T_2 = 3$. Остальные значения вычисляем последовательно по рекуррентной формуле: $1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, 10923, 21845, 43691.$