Автономная некоммерческая организация «Общеобразовательная школа Центра педагогического мастерства»

ШКОЛА ЦЕНТРА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

129272, Москва, Олимпийский проспект, д.11 стр.1. ИНН 9702004203, ОГРН 1197700011640, КПП 770201001 эл. почта: info@school-cpm.ru тел: +7(495)118-36-62

Примеры заданий вступительных испытаний по математике

11 класс

1. Задание с параметром. Сколько существует таких целых a на отрезке [-1; 4], что уравнение $\frac{x^2-4x+a^2-2a}{x^2+ax-6a^2}=0$ имеет ровно два действительных корня?

Решение: Числитель должен быть равен 0, а знаменатель – нет. Значит, $(x-2)^2+(a-1)^2=5$ и $(x-2a)(x+3a)\neq 0$. Построив на координатной плоскости xOa окружность с центром (2; 1) и радиусом $\sqrt{5}$, а также две прямых $x=2a$ и $x=3a$, легко определить, какие пары $(x;a)$ удовлетворяют условию (получится окружность с тремя выколотыми точками). По графику определим, при каких a корней будет ровно два: $a\in\left(1-\sqrt{5};\ -1\right),(-1;0),(0;2);(2;1+\sqrt{5})$. Поскольку $1-\sqrt{5}<-1$ и $3<1+\sqrt{5}<4$, подходят целые $a=1;3$, то есть таких a две штуки.

2. Производная.

При каком значении b прямая $y=3x+b$ является касательной к графику функции $y=\sqrt{x}$? В ответ запишите число $300b$, округлённое до целых.

Решение: Записав условие касания $\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=3\\ 3x_0+b=\sqrt{x_0}\end{cases}$, получим: $x_0=36, b=\frac{1}{12}$. В ответ пишем 25.

3. Аналитическая геометрия.

Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами (1; 3), (4, -5); (-8; 2).

Решение: Поскольку точка пересечения медиан треугольника – это его центр масс, можно сразу найти его координаты как $\left(\frac{1+4-8}{3};\frac{3-5+2}{3}\right)=(-1;0)$. Альтернативное решение можно получить, найдя сначала середину какой-либо стороны, а затем воспользовавшись тем, что точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

4. Логика.

В комнате находятся 10 человек. Каждый из них либо рыцарь – всегда говорит правду, либо лжец – всегда лжет. Первый сказал: «Среди нас есть хотя бы один лжец». Второй сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 2». Третий сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 3». ... Десятый сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 10». Какое наибольшее количество рыцарей может быть в комнате?

Решение: 4, под номерами 1, 2, 3, 6. Первый – очевидно, рыцарь. Значит, с одной стороны, лжецы есть. С другой стороны, их не более 9. Тогда последний – лжец. Легко понять, что и девятый – лжец (иначе лжецов 9, но, если это рыцарь, их не более, чем 8).

ШКОЛА ЦЕНТРА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА
129272, Москва, Олимпийский проспект, д.11 стр.1. ИНН 9702004203, ОГРН 1197700011640, КПП 770201001 эл. почта: info@school-cpm.ru тел: +7(495)118-36-62

Если восьмой – рыцарь, то лжецов – 8, то есть это все, кроме первого и восьмого. Но тогда второй и четвёртый говорят правду, что невозможно, поэтому восьмой – лжец. Если седьмой – рыцарь, то лжецов 7 – все, кроме него, первого и ещё кого-то. Но число 7 – простое, так что больше никто рыцарем быть не может. Поэтому и седьмой – лжец. Если шестой – рыцарь, то лжецов – 6, и рыцарями являются также третий и второй. Этот случай подходит. Если же и шестой – лжец, то количество лжецов не делится на 10, 9, 8, 7, 6. Значит, их не более пяти. С другой стороны, их уже минимум 5. Значит, их ровно 5, но тогда есть рыцари, говорящие ложь (с четвёртого по второго), что невозможно.

5. Комбинаторика.

Сколькими способами можно составить команду из 1 вратаря, 4 защитников, 4 полузащитников и 2 нападающих, если в клубе 3 вратаря, 7 защитников, 6 полузащитников и 3 нападающих?

Решение: По определению числа сочетаний, и применяя правило произведения, имеем: $C_3^1 \cdot C_7^4 \cdot C_6^4 \cdot C_3^2 = 3 \cdot \frac{7\cdot6\cdot5}{6} \cdot \frac{6\cdot5}{2} \cdot 3 = 4725.$

6. Геометрия вычислительная.

В равнобедренном треугольнике *ABC* (*AB*=*BC*) угол при вершине *B* равен 80°, а точка *M* внутри треугольника расположена так, что $\angle MAC$=30°, а $\angle MCA$=10°. Найдите величину угла *BMC*.

Решение: 70°. Пусть x – искомый угол, a=*AB*=*BC* - боковая сторона. Тогда $\angle AMC$=140°, $\angle AMB$=220°–x, $\angle MAB$=20°, $\angle MCB$=40°. По теореме синусов в треугольниках *CMB* и *AMB* получим уравнение $\frac{\sin(x-40^\circ)}{\sin x} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}$, из которого найдём x. Тригонометрическое уравнение также можно получить с помощью теоремы Чевы в угловой форме.

7. Задача на какую-либо специфическую "олимпиадную" тему.

В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрата разделился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

Решение: См. https://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=30796.

Ответ: 42.

8. Задача на делимость и остатки повышенной сложности.

Какой максимальный наибольший общий делитель может быть у чисел $5n + 8$ и $9n - 4$ при натуральном n?

Решение: Поскольку он также будет делителем числа $9 \cdot (5n + 8) - 5 \cdot (9n - 4) = 92$, то он не превосходит 92. При это 92 подходит. Например, при $n = 72$.

9. Задача типа "оценка+пример" повышенной сложности.

Все клетки квадрата 4х4 раскрашиваются, каждая – одним из цветов имеющегося набора. Какое наибольшее количество цветов может быть использовано, если в любом квадрате 2х2 есть клетки одного цвета?

Решение: Всего клеток 16, но в каждом угловом квадрате 2х2 должны быть клетки одного цвета, так что цветов уже максимум 12. Если их ровно 12, то в каждом угловом квадрате все цвета различны, и тогда проблема с центральным квадратом 2х2. Значит, цветов не более 11, пример несложно построить с помощью принципа поворотной симметрии.

5	1	6	7
4	1	1	1
3	3	2	8
11	10	2	9

10. Нестандартная задача дискретной математики.

Сколькими способами можно разрезать доску 2х16 на прямоугольники 1х2 и квадраты 2х2 (использовать можно любые из этих фигурок в любом количестве)?

Решение: 43691. Пусть $T_n -$ количество способов разрезать доску $2xn$. Заметим, что $T_n = T_{n-1} + 2T_{n-2}$, так как в конце ряда лежит либо вертикальная доминошка, либо две горизонтальных, либо квадрат. При малых значениях n определяем перебором: $T_1 = 1, T_2 = 3$. Остальные значения вычисляем последовательно по рекуррентной формуле: $1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, 10923, 21845, 43691$.