Автономная некоммерческая организация «Общеобразовательная школа Центра педагогического мастерства»

ШКОЛА ЦЕНТРА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

129272, Москва, Олимпийский проспект, д.11 стр.1. ИНН 9702004203, ОГРН 1197700011640, КПП 770201001 эл. почта: info@school-cpm.ru тел: +7(495)118-36-62

Примеры заданий вступительных испытаний по математике

10 класс

1. Задание с параметром.

Сколько существует таких целых a на отрезке [-1; 4], что уравнение $\frac{x^2-4x+a^2-2a}{x^2+ax-6a^2}=0$ имеет ровно два действительных корня?

Решение: Числитель должен быть равен 0, а знаменатель – нет. Значит, $(x-2)^2+(a-1)^2=5$ и $(x-2a)(x+3a)\neq 0$. Построив на координатной плоскости xOa окружность с центром (2; 1) и радиусом $\sqrt{5}$, а также две прямых $x=2a$ и $x=3a$, легко определить, какие пары $(x;a)$ удовлетворяют условию (получится окружность с тремя выколотыми точками). По графику определим, при каких a корней будет ровно два: $a\in\left(1-\sqrt{5};\ -1\right),(-1;0),(0;2);(2;1+\sqrt{5})$. Поскольку $1-\sqrt{5}<-1$ и $3<1+\sqrt{5}<4$, подходят целые $a=1;3$, то есть таких a две штуки.

2. Функции и графики.

Сколько корней и каких по знаку будет иметь уравнение $ax^2+bx=c$ на отрезке [-1; 1], если a, b, c - длины сторон некоторого треугольника?

Решение: Рассмотрим функцию $f(x)=ax^2+bx-c$. Поскольку a,b,c – длины сторон некоторого треугольника, то эти числа положительные, а также удовлетворяют неравенствам треугольника: $a+b>c, b+c>a, c+a>b$. Заметим, что $f(1)=a+b-c>0, f(-1)=a-b-c<0, f(0)=-c<0$. Значит, на отрезке [-1; 1] будет ровно 1 пересечение графика с осью абсцисс, причём оно будет расположено на интервале (0; 1). Значит, ответ – 1 положительный корень.

3. Аналитическая геометрия.

Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами (1; 3), (4, -5); (-8; 2).

Решение: Поскольку точка пересечения медиан треугольника – это его центр масс, можно сразу найти его координаты как $\left(\frac{1+4-8}{3};\frac{3-5+2}{3}\right)=(-1;0)$. Альтернативное решение можно получить, найдя сначала середину какой-либо стороны, а затем воспользовавшись тем, что точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.)

4. Логика. В комнате находятся 10 человек. Каждый из них либо рыцарь – всегда говорит правду, либо лжец – всегда лжет. Первый сказал: «Среди нас есть хотя бы один

129272, Москва, Олимпийский проспект, д.11 стр.1. ИНН 9702004203, ОГРН 1197700011640, КПП 770201001 эл. почта: info@school-cpm.ru тел: +7(495)118-36-62

лжец». Второй сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 2». Третий сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 3». ... Десятый сказал: «Количество лжецов в этой комнате делится на 10». Какое наибольшее количество рыцарей может быть в комнате? (4, под номерами 1, 2, 3, 6. Первый – очевидно, рыцарь. Значит, с одной стороны, лжецы есть. С другой стороны, их не более 9. Тогда последний – лжец. Легко понять, что и девятый – лжец (иначе лжецов 9, но, если это рыцарь, их не более, чем 8). Если восьмой – рыцарь, то лжецов – 8, то есть это все, кроме первого и восьмого. Но тогда второй и четвёртый говорят правду, что невозможно, поэтому восьмой – лжец. Если седьмой – рыцарь, то лжецов 7 – все, кроме него, первого и ещё кого-то. Но число 7 – простое, так что больше никто рыцарем быть не может. Поэтому и седьмой – лжец. Если шестой – рыцарь, то лжецов – 6, и рыцарями являются также третий и второй. Этот случай подходит. Если же и шестой – лжец, то количество лжецов не делится на 10, 9, 8, 7, 6. Значит, их не более пяти. С другой стороны, их уже минимум 5. Значит, их ровно 5, но тогда есть рыцари, говорящие ложь (с четвёртого по второго), что невозможно.)

5. Комбинаторика. Сколькими способами можно составить команду из 1 вратаря, 4 защитников, 4 полузащитников и 2 нападающих, если в клубе 3 вратаря, 7 защитников, 6 полузащитников и 3 нападающих? (По определению числа сочетаний, и применяя правило произведения, имеем: $C_3^1 \cdot C_7^4 \cdot C_6^4 \cdot C_3^2 = 3 \cdot \frac{7\cdot6\cdot5}{6} \cdot \frac{6\cdot5}{2} \cdot 3 = 4725.$

6. Геометрия вычислительная.

В равнобедренном треугольнике *ABC* (*AB*=*BC*) угол при вершине *B* равен 80°, а точка *M* внутри треугольника расположена так, что ∠*MAC*=30°, а ∠*MCA*=10°. Найдите величину угла *BMC*.

Решение: 70°. Пусть *x* – искомый угол, *a*=*AB*=*BC* - боковая сторона. Тогда ∠*AMC*=140°, ∠*AMB*=220°–*x*, ∠*MAB*=20°, ∠*MCB*=40°. По теореме синусов в треугольниках *CMB* и *AMB* получим уравнение $\frac{\sin(x-40°)}{\sin x} = \frac{\sin 20°}{\sin 40°}$, из которого найдём *x*. Тригонометрическое уравнение также можно получить с помощью теоремы Чевы в угловой форме.

7. Задача на какую-либо специфическую "олимпиадную" тему.

В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрата разделился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

Решение: См. https://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=30796.

Ответ: 42.

8. Задача на делимость и остатки повышенной сложности.

Какой максимальный наибольший общий делитель может быть у чисел $5n + 8$ и $9n - 4$ при натуральном n?

Решение: Поскольку он также будет делителем числа $9 \cdot (5n + 8) - 5 \cdot (9n - 4) = 92$, то он не превосходит 92. При это 92 подходит. Например, при $n = 72$.

ШКОЛА ЦЕНТРА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА
129272, Москва, Олимпийский проспект, д.11 стр.1. ИНН 9702004203, ОГРН 1197700011640,
КПП 770201001 эл. почта: info@school-cpm.ru тел: +7(495)118-36-62

9. Задача типа "оценка+пример" повышенной сложности.

Все клетки квадрата 4x4 раскрашиваются, каждая – одним из цветов имеющегося набора. Какое наибольшее количество цветов может быть использовано, если в любом квадрате 2x2 есть клетки одного цвета?

Решение: Всего клеток 16, но в каждом угловом квадрате 2x2 должны быть клетки одного цвета, так что цветов уже максимум 12. Если их ровно 12, то в каждом угловом квадрате все цвета различны, и тогда проблема с центральным квадратом 2x2. Значит, цветов не более 11, пример несложно построить с помощью принципа поворотной симметрии.

5	**1**	**6**	**7**
4	**1**	**1**	**1**
3	**3**	**2**	**8**
11	**10**	**2**	**9**

10. Нестандартная задача дискретной математики.

Сколькими способами можно разрезать доску 2x16 на прямоугольники 1x2 и квадраты 2x2 (использовать можно любые из этих фигурок в любом количестве)?

Решение: 43691. Пусть $T_n -$ количество способов разрезать доску $2xn$. Заметим, что $T_n = T_{n-1} + 2T_{n-2}$, так как в конце ряда лежит либо вертикальная доминошка, либо две горизонтальных, либо квадрат. При малых значениях n определяем перебором: $T_1 = 1, T_2 = 3$. Остальные значения вычисляем последовательно по рекуррентной формуле: $1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, 10923, 21845, 43691$.